



**Cristina Raquel Santos Silva**  
Licenciada

# **Desenvolvimento de Formulações de Elementos Finitos para Problemas de Transferência de Calor**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre  
em Engenharia Civil - Perfil de Estruturas

Orientador: Prof. Doutor Dragos Ionut Moldovan  
Co-orientadora: Prof. Doutora Ildi Cismasiu

Júri:

Presidente: Prof. Doutor João Rocha de Almeida  
Arguente: Prof. Doutor Luís Manuel Soares dos Santos Castro  
Vogal: Prof. Doutor Mário Jorge Vicente da Silva  
Prof. Doutor Dragos Ionut Moldovan



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Maio de 2014**





“Copyright” Cristina Raquel Santos Silva, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

Um especial e sincero agradecimento ao meu orientador, Professor Ionut Moldovan, pelo tempo dispendido, pelo apoio, paciência e motivação ao longo destes meses.

Agradeço à Professora Ildi Cismasiu pela permanente disponibilidade e apoio desde o início deste trabalho.

À Marta, à Cláudia e ao Nuno tenho de agradecer pela compreensão, ajuda e pelos bons momentos, sempre.

Por fim, a minha imensa gratidão aos meus pais, por tudo.



# Resumo

Neste trabalho são introduzidos os diferentes mecanismos de transferência de calor, nomeadamente a condução, convecção e radiação, e os respectivos modelos matemáticos são obtidos. A partir das equações regentes, o modelo de temperatura das formulações híbrida e híbrida-Trefftz do método dos elementos finitos é aplicado à análise do problema bidimensional da condução de calor, em regime estacionário. Para uma comparação efectiva com o modelo de elementos finitos convencionais correspondente, esta formulação é também incluída.

Na formulação convencional do método, nas fronteiras entre os elementos, a condição de conformidade das temperaturas é imposta localmente, através da escolha de funções de forma para a aproximação do campo das temperaturas, enquanto a continuidade dos fluxos de calor é imposta em forma fraca. Na formulação em elementos híbridos são aproximados, de forma independente e desligada dos nós, as temperaturas no domínio e os fluxos de calor normais nas fronteiras e a continuidade das temperaturas, tanto no domínio como nas fronteiras, é imposta em forma fraca. A formulação em elementos híbridos-Trefftz é derivada da formulação híbrida correspondente, restringindo a base de aproximação no domínio a satisfazer a forma homogénea da equação governativa do problema.

As equações dos modelos de elementos finitos não-convencionais deduzidas são implementadas e é apresentado um conjunto de testes efectuados para problemas com solução analítica, de modo a validar os modelos propostos e a avaliar o seu desempenho em termos de precisão e convergência para refinamentos  $p$  e  $h$ . São também resolvidos problemas mais complexos, para uma análise comparativa entre as três formulações estudadas.

Mostra-se que os elementos não-convencionais permitem obter soluções precisas do problema, com um número de graus de liberdade inferior ao necessário com elementos finitos convencionais, em particular nos resultados dos campos de fluxos de calor. Embora os elementos finitos convencionais apresentem uma taxa de convergência para refinamento  $h$  superior, esta é inferior à conseguida com refinamento  $p$  através de elementos não convencionais. Da análise comparativa entre os elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz, observa-se que os elementos finitos híbridos-Trefftz permitem considerar menos graus de liberdade para obter a mesma precisão de resultados e para problemas oscilatórios têm uma taxa de convergência para refinamento  $p$  superior, o que se deve às bases de aproximação adoptadas, que contêm informação física (térmica) do problema. Por outro lado, as funções de aproximação utilizadas na formulação híbrida-Trefftz tendem a ser mais complexas numericamente e mais pesadas para a implementação.

## **Palavras chave:**

Transferência de calor

Condução térmica

Elementos finitos convencionais

Elementos finitos híbridos

Elementos finitos híbridos-Trefftz

# Abstract

In this study, the different mechanisms of heat transfer are analyzed, namely conduction, convection and radiation, and their mathematical models are obtained. From the governing equations, the temperature model of the hybrid and hybrid-Trefftz finite element methods is applied to the analysis of the two-dimensional steady-state heat conduction problem. For an effective comparison with the corresponding conventional finite element model, this formulation is also included.

In the conventional formulation of the finite element method, on the elements' boundaries, the requirement of the temperatures conformity is enforced locally, through adequate choice of the temperature shape functions. Conversely, the heat fluxes' continuity is imposed in a weak form. In the hybrid element formulation, the temperatures in the domain and the normal heat fluxes on the boundaries are approximated, in a way that is independent and disconnected from the nodes and the temperatures' continuity on both the domain and boundaries is imposed in a weak form. The hybrid-Trefftz element formulation is derived from the corresponding hybrid formulation, by constraining the approximation basis in the domain to satisfy the homogeneous form of the governing equations of the problem.

The non-conventional finite element formulations are implemented and a set of tests for problems with analytic solution are presented, in order to validate the proposed models and evaluate their performance in terms of accuracy and convergence under  $p$ - and  $h$ -refinements. More complex problems are also solved for comparative analysis between the three formulations.

It is shown that the non-conventional elements endorse accurate solutions to the problem, with a number of degrees of freedom smaller than that required with conventional finite elements. This is particularly true for the heat flux field. Although the conventional finite elements present a superior convergence rate under  $h$ -refinement as compared to the non-conventional formulations, this rate is still much inferior to the convergence rate achieved under  $p$ -refinement with non-conventional elements. A comparative analysis between the hybrid and hybrid-Trefftz elements shows that the hybrid-Trefftz finite elements tend to require fewer degrees of freedom to achieve the same accuracy of results. Also, for oscillatory problems, hybrid-Trefftz elements generally present a higher convergence rate under  $p$ -refinement. Both traits are consequences of the physical information contained in the approximation bases adopted for the hybrid-Trefftz elements. On the other hand, the functions collected by the Trefftz bases tend to be numerically more demanding.

## **Keywords:**

Heat transfer  
Heat conduction  
Conventional finite elements  
Hybrid finite elements  
Hybrid-Trefftz finite elements



# Índice de Matérias

<b>Copyright</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de abreviaturas, siglas e símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Formulações híbridas de elementos finitos . . . . .	4
1.3 Estado da arte . . . . .	7
1.4 Objectivos do trabalho . . . . .	8
1.5 Organização do texto . . . . .	8
<b>2 Apresentação do problema</b>	<b>11</b>
2.1 Introdução . . . . .	11
2.2 Transferência de calor . . . . .	11
2.2.1 Condução . . . . .	12
2.2.2 Convecção . . . . .	15
2.2.3 Radiação . . . . .	16
2.2.4 Condições iniciais e de fronteira . . . . .	17
2.3 Solução geral do problema estacionário . . . . .	19
2.4 Forma fraca do problema estacionário . . . . .	21
<b>3 Elementos finitos convencionais</b>	<b>25</b>
3.1 Introdução . . . . .	25
3.2 Discretização . . . . .	25
3.3 Equação dos elementos . . . . .	31
3.4 Qualidade da solução . . . . .	35
3.5 Exemplos numéricos . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Elementos finitos híbridos</b>	<b>43</b>
4.1	Introdução . . . . .	43
4.2	Equação dos elementos . . . . .	43
4.3	Implementação . . . . .	46
4.3.1	Geometria e condições de fronteira . . . . .	46
4.3.2	Construção e resolução do sistema . . . . .	47
4.3.3	Construção da solução . . . . .	49
4.4	Convergência . . . . .	51
4.4.1	Solução analítica . . . . .	51
4.4.2	Definição do modelo . . . . .	53
4.4.3	Resultados . . . . .	54
4.5	Exemplos numéricos . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Elementos finitos híbridos-Trefftz</b>	<b>67</b>
5.1	Introdução . . . . .	67
5.2	Equação dos elementos . . . . .	67
5.3	Implementação . . . . .	71
5.3.1	Geometria e condições de fronteira . . . . .	71
5.3.2	Construção e resolução do sistema . . . . .	72
5.3.3	Construção da solução . . . . .	74
5.4	Convergência . . . . .	75
5.4.1	Definição do modelo . . . . .	76
5.4.2	Resultados . . . . .	76
5.5	Exemplos numéricos . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>89</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Exemplo com elementos finitos convencionais</b>	<b>99</b>
<b>B</b>	<b>Exemplo com elementos finitos híbridos</b>	<b>109</b>
<b>C</b>	<b>Exemplo com elementos finitos híbridos-Trefftz</b>	<b>119</b>

# Índice de Figuras

2.1	Transmissão de calor por condução . . . . .	12
2.2	Condução térmica num elemento de volume infinitesimal . . . . .	14
2.3	Transmissão de calor por convecção de uma superfície para um fluido em movimento . . . . .	16
2.4	Transmissão de calor por radiação entre uma superfície e a sua envolvente . . . . .	17
2.5	Domínio e fronteiras de Neumann, Dirichlet e Robin convectiva . . .	18
3.1	Malha de elementos finitos . . . . .	26
3.2	Elemento bilinear rectangular de 4 nós . . . . .	27
3.3	Termos do triângulo de Pascal usados nas funções de interpolação	28
3.4	Função de forma $U_1$ . . . . .	28
3.5	Função de forma $U_2$ . . . . .	30
3.6	Função de forma $U_3$ . . . . .	30
3.7	Função de forma $U_4$ . . . . .	30
3.8	Descrição do teste 1 . . . . .	38
3.9	Teste 1.1 . . . . .	38
3.10	Teste 1.2 . . . . .	39
3.11	Descrição do teste 2 . . . . .	40
3.12	Teste 2.1 . . . . .	40
3.13	Teste 2.2 . . . . .	41
4.1	Domínio e fronteiras de Neumann, Dirichlet e interiores . . . . .	45
4.2	Referencial do domínio e fronteiras do elemento . . . . .	47
4.3	Direcções positivas dos fluxos de calor normais . . . . .	47
4.4	Condições de fronteira e referencial das soluções analíticas . . . .	51
4.5	Solução analítica $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$ . . . . .	52
4.6	Solução analítica $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi\bar{x}} \sin(\pi\bar{y})$ . . . . .	52
4.7	Solução analítica $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\bar{y}\right)$ . . . . .	52
4.8	Solução analítica $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi\bar{x}} \sin(2\pi\bar{y})$ . . . . .	52
4.9	Malhas testadas (refinamento $h$ ) . . . . .	53
4.10	Taxa de convergência, $k$ . . . . .	54
4.11	Temperatura para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$ . . . . .	55
4.12	Fluxo de calor na direcção $x$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$ . . . . .	55
4.13	Fluxo de calor na direcção $y$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$ . . . . .	56
4.14	Temperatura para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi\bar{x}} \sin(\pi\bar{y})$ . . . . .	56

4.15 Fluxo de calor na direcção $x$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi \bar{x}} \sin(\pi \bar{y})$ . . . . .	57
4.16 Fluxo de calor na direcção $y$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi \bar{x}} \sin(\pi \bar{y})$ . . . . .	57
4.17 Temperatura para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2} \bar{x}} \sin(\frac{3\pi}{2} \bar{y})$ . . . . .	58
4.18 Fluxo de calor na direcção $x$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2} \bar{x}} \sin(\frac{3\pi}{2} \bar{y})$ . . . . .	58
4.19 Fluxo de calor na direcção $y$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2} \bar{x}} \sin(\frac{3\pi}{2} \bar{y})$ . . . . .	59
4.20 Temperatura para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi \bar{x}} \sin(2\pi \bar{y})$ . . . . .	59
4.21 Fluxo de calor na direcção $x$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi \bar{x}} \sin(2\pi \bar{y})$ . . . . .	60
4.22 Fluxo de calor na direcção $y$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi \bar{x}} \sin(2\pi \bar{y})$ . . . . .	60
4.23 Convergência da solução para refinamentos $p$ e $h$ . . . . .	61
4.24 Teste 1 . . . . .	63
4.25 Teste 2 . . . . .	64
5.1 Temperatura para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2} \bar{x}} \sin(\frac{\pi}{2} \bar{y})$ . . . . .	77
5.2 Fluxo de calor na direcção $x$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2} \bar{x}} \sin(\frac{\pi}{2} \bar{y})$ . . . . .	77
5.3 Fluxo de calor na direcção $y$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2} \bar{x}} \sin(\frac{\pi}{2} \bar{y})$ . . . . .	78
5.4 Temperatura para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi \bar{x}} \sin(\pi \bar{y})$ . . . . .	78
5.5 Fluxo de calor na direcção $x$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi \bar{x}} \sin(\pi \bar{y})$ . . . . .	79
5.6 Fluxo de calor na direcção $y$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi \bar{x}} \sin(\pi \bar{y})$ . . . . .	79
5.7 Temperatura para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2} \bar{x}} \sin(\frac{3\pi}{2} \bar{y})$ . . . . .	80
5.8 Fluxo de calor na direcção $x$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2} \bar{x}} \sin(\frac{3\pi}{2} \bar{y})$ . . . . .	80
5.9 Fluxo de calor na direcção $y$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2} \bar{x}} \sin(\frac{3\pi}{2} \bar{y})$ . . . . .	81
5.10 Temperatura para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi \bar{x}} \sin(2\pi \bar{y})$ . . . . .	81
5.11 Fluxo de calor na direcção $x$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi \bar{x}} \sin(2\pi \bar{y})$ . . . . .	82
5.12 Fluxo de calor na direcção $y$ para $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi \bar{x}} \sin(2\pi \bar{y})$ . . . . .	82
5.13 Convergência da solução para refinamentos $p$ e $h$ . . . . .	83
5.14 Teste 1 . . . . .	85
5.15 Teste 2 . . . . .	86
A.1 Exemplo . . . . .	99
A.2 Malha de elementos finitos . . . . .	100
A.3 Resultados . . . . .	108
B.1 Malha de elementos finitos . . . . .	109
B.2 Nós da malha de elementos finitos . . . . .	115
B.3 Resultados . . . . .	117
C.1 Malha de elementos finitos . . . . .	119
C.2 Nós da malha de elementos finitos . . . . .	129
C.3 Resultados . . . . .	131

# Índice de Tabelas

3.1	Prós e contras do refinamento $h$	36
3.2	Prós e contras do refinamento $p$	37
4.1	Verificação da indeterminação cinemática do sistema	49
4.2	Comparação entre elementos finitos convencionais e elementos finitos híbridos	66
5.1	Verificação da indeterminação cinemática do sistema	73
5.2	Comparação entre elementos finitos híbridos e elementos finitos híbridos-Trefftz	87
A.1	Valores nodais do fluxo de calor na direcção $x$ [W/m <sup>2</sup> ]	108
A.2	Valores nodais do fluxo de calor na direcção $y$ [W/m <sup>2</sup> ]	108
B.1	Valores nodais da temperatura [°C]	116
B.2	Valores nodais do fluxo de calor na direcção $x$ [W/m <sup>2</sup> ]	116
B.3	Valores nodais do fluxo de calor na direcção $y$ [W/m <sup>2</sup> ]	116
C.1	Valores nodais da temperatura [°C]	130
C.2	Valores nodais do fluxo de calor na direcção $x$ [W/m <sup>2</sup> ]	131
C.3	Valores nodais do fluxo de calor na direcção $y$ [W/m <sup>2</sup> ]	131



# Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

## Abreviaturas

MEF método dos elementos finitos

gdl graus de liberdade

## Siglas

FCT-UNL Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

IST-UL Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa

## Símbolos

$a$  metade da largura de um elemento rectangular

$A$  área da superfície normal à direcção do fluxo de calor

$b$  metade da altura de um elemento rectangular

$b$  vector do calor gerado internamente

$B$  matriz das fronteiras de Dirichlet e interiores

$c$  calor específico

$Dim(X)$  número de linhas do vector  $X$

$e$  elemento

$E$  erro relativo

$h$  coeficiente de transmissão de calor por convecção

$k$  condutibilidade térmica; taxa de convergência

$K$  matriz de condutibilidade

$K_p$  vector do calor gerado internamente

$L$  comprimento da fronteira

- $\mathbf{n}$  vector da normal exterior
- $n_{\Gamma}$  grau das funções na base de aproximação na fronteira,  $Z$
- $n_D$  grau/ordem das funções na base de aproximação no domínio,  $U$
- $N$  número de graus de liberdade do sistema
- $N_{\Gamma}$  número de funções na base de aproximação na fronteira,  $Z$
- $N_D$  número de funções na base de aproximação no domínio,  $U$
- $q$  fluxo de calor
- $q_{\Gamma}$  fluxo de calor normal aplicado na fronteira de Neumann
- $q_n$  fluxo de calor normal à superfície
- $\mathbf{q}$  vector do fluxo de calor
- $\mathbf{q}_{\Gamma}$  vector dos fluxos de calor aplicados
- $\bar{\mathbf{q}}$  vector da aproximação do fluxo de calor
- $Q$  calor gerado internamente
- $R$  resíduo
- $s$  coordenada da fronteira
- $t$  tempo
- $\mathbf{t}_{\Gamma}$  vector da temperatura aplicada
- $\mathbf{t}_p$  vector do calor gerado internamente
- $T$  temperatura
- $T_{\Gamma}$  temperatura aplicada na fronteira de Dirichlet
- $T_h$  solução da equação de Laplace
- $T_p$  solução particular da equação de Poisson
- $\bar{T}$  aproximação da temperatura
- $U_p$  solução particular da equação de Poisson
- $U$  vector das funções de forma; base de aproximação no domínio
- $U_l$  componente linear da base de aproximação no domínio
- $U_n$  componente não linear da base de aproximação no domínio
- $X$  vector das constantes associadas às funções da base de aproximação no domínio,  $U$



- $w$  função teste
- $W$  vector das funções de teste
- $Y$  vector das constantes associadas às funções da base de aproximação na fronteira,  $Z$
- $Z$  base de aproximação na fronteira
- $\alpha$  difusibilidade térmica; número de indeterminação estática
- $\beta$  número de indeterminação cinemática
- $\delta_j$  função delta de Dirac
- $\epsilon$  emissividade
- $\Gamma$  fronteira
- $\Gamma_r$  fronteira de Robin
- $\Gamma_u$  fronteira de Dirichlet ou essencial
- $\Gamma_\sigma$  fronteira de Neumann ou natural
- $\Gamma_{int}$  fronteira entre elementos adjacentes ou interior
- $\Omega$  domínio
- $\phi$  vector das temperaturas nodais
- $\rho$  massa específica
- $\sigma$  constante de Stefan-Boltzmann
- $\varphi$  vector dos pesos



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Os desastres, naturais ou de origem humana, muitas vezes demonstram a vulnerabilidade das infraestruturas e evidenciam a necessidade de rever as práticas do projecto que levaram ao desempenho insatisfatório. Foi o caso dos eventos do 11 de Setembro de 2001, que levantaram questões sobre como é que o fogo é incorporado no projecto de edifícios e sobre o comportamento das estruturas ao fogo.

O fogo afecta a estrutura pelo calor que transmite aos elementos construtivos, que faz com que os materiais se alterem e os parâmetros que descrevem a resistência dos materiais se deteriore. O estado de solicitação nas estruturas também é agravado pelo fogo, uma vez que os materiais expandem com a temperatura e os constringimentos devidos à geometria da estrutura resultam no aparecimento e redistribuição de tensões significativos. Este ponto é, provavelmente, o que tem um impacto mais significativo nas estruturas sujeitas ao fogo mas raramente é considerado no projecto.

As regulamentações [1] definem a acção do fogo em termos de curvas de incêndio nominais (curvas temperatura-tempo), o que implica que todos os elementos estruturais ficam sujeitos à mesma agressividade térmica, independentemente da sua localização. No entanto, a natureza local dos fogos em compartimentos resulta no aquecimento não homogéneo dos elementos, que pode ser mais detrimental para o comportamento da estrutura.

À medida que aumenta a compreensão dos eventos do 11 de Setembro constata-se que a resposta da estrutura podia ter sido prevista através de uma análise detalhada do seu comportamento estrutural global ao fogo [58], o que teria permitido evitar a morte de centenas de bombeiros, que continuaram as suas operações totalmente abstraídos do colapso iminente das torres.

A queda das torres do World Trade Center veio despertar um novo interesse e investimento no campo da engenharia de segurança ao incêndio. Em particular, na necessidade de se evoluir para uma abordagem ao projecto ao fogo dos edifícios com base na análise do comportamento estrutural, em vez do projecto baseado em regras prescritivas.

FireGrid é, neste sentido, um projecto ambicioso e inovador, que procura

desenvolver a tecnologia para suportar esta nova maneira de gerir a resposta às emergências de fogo no ambiente das construções modernas, criando uma ferramenta que descreve adequadamente e prevê o desenvolvimento do fogo e as suas consequências nas pessoas e na estrutura. É liderado pelo centro BRE de engenharia de segurança ao fogo da Universidade de Edimburgo [19].

Resumidamente, esta nova abordagem visa desenvolver um sistema capaz de receber diferentes tipos de dados de diversos sensores instalados nos edifícios, avaliar a sua relevância e enviar a informação em formato apropriado para as ferramentas que quantificam a evolução dos incêndios e para as ferramentas que analisam o comportamento da estrutura. Os modelos de mecânica dos fluidos computacional e elementos finitos são corridos mais rapidamente do que em tempo real, de modo a conseguirem prever a evolução e consequências do evento e a traduzirem os resultados em instruções operacionais para os sistemas activos, como alarmes, sprinklers, ventilação, etc., e para a intervenção dos bombeiros.

Um dos primeiros passos dados no projecto foi a realização de um conjunto de testes com fogo, de modo a aprofundar o conhecimento da dinâmica do fogo em edifícios reais e do efeito do fogo nas estruturas. Os testes de Dalmarnock [53] foram conduzidos num edifício real de betão armado, de 22 andares, situado em Dalmarnock, Glasgow, em Julho de 2006. A particularidade destes testes é que foram os primeiros a serem feitos numa estrutura de betão armado onde o fogo foi real, a estrutura foi um edifício completo e não um elemento ou conjunto de elementos estruturais e onde tanto o fogo como o comportamento estrutural foram monitorizados e documentados. Para a monitorização dos compartimentos usaram-se centenas de sensores, de temperatura, fluxo de calor, fumo e deformação de elementos estruturais.

Para avaliar o estado da arte das simulações do fogo, foi conduzido um estudo da modelação ao fogo antes dos testes. Vários grupos de investigadores simularam independentemente o cenário de teste a partir de descrições de geometria do compartimento, combustíveis, fontes de ignição e condições de ventilação. Nestes estudos, foram observadas discrepâncias consideráveis entre as previsões do fogo obtidas, não só entre elas mas também posteriormente em relação aos dados experimentais. Assim, foi possível concluir que a precisão da previsão do desenvolvimento do fogo é, em geral, fraca, devido ao grande número de variáveis envolvidas, que conduzem a uma grande variação nos resultados.

No entanto, a dificuldade em simular este tipo de fenómenos foi também verificada na modelação *a posteriori*, mesmo quando as características do fogo são conhecidas e introduzidas como dados, nas ferramentas mais modernas da mecânica dos fluidos computacional. O comportamento real dos combustíveis é muito difícil de avaliar e quantificar e eventos como a ignição de itens secundários, janelas partirem-se, combustão generalizada (*flash-over*), activação de sprinklers, intervenção no fogo, etc., levam a que os fogos em ambientes fechados mostrem um comportamento complexo. Estes eventos podem mudar a evolução do fogo drasticamente o que, do ponto de vista matemático, pode levar a bifurcações da solução e a grande sensibilidade às condições iniciais e de fronteira e aos parâmetros do modelo. Desta análise foi verificado que, apenas é possível obter uma boa concordância entre as simulações e as experiências quando são fornecidos dados suficientes para guiar a modelação. Ou seja, a

avaliação detalhada da resposta de uma estrutura particular a um fogo modelado só é possível com o uso contínuo dos dados dos sensores para validar e actualizar as simulações, o que implica correr várias simulações simultaneamente, rejeitando-se as que não coincidirem com os dados recebidos dos sensores.

Para se conseguir prever o comportamento do fogo e o seu efeito nas estruturas é necessário que as simulações sejam corridas em tempo mais rápido do que o real, o que não é possível ser praticado a curto prazo, sendo este um dos principais tópicos de investigação e desenvolvimento no projecto.

Na componente da análise estrutural ao fogo, actualmente podem ser corridos grandes modelos de elementos finitos de estruturas com fogo explorando computadores de alto desempenho e processamento paralelo. Contudo, este tipo de simulação ainda não é possível ser praticado de modo a ser mais rápido do que o próprio evento. Este problema é ainda mais grave quando é necessário investigar muitos cenários alternativos e para instalações grandes e complexas, do tipo a que o sistema FireGrid irá beneficiar mais. Os modelos actuais de elementos finitos conformes de temperatura (i.e. elementos convencionais) requerem malhas muito refinadas em regiões onde existem elevados gradientes de temperatura. Estas regiões não são facilmente previsíveis e não estão restritas a uma região em particular durante o desenvolvimento do fogo, sendo necessário adoptar técnicas de refinamento pesadas para se obterem soluções precisas. Outra das conclusões retiradas dos testes foi que, para elementos estruturais, os fluxos de calor são uma característica importante, uma vez que a sua variação espacial pode levar a tensões não uniformes nestes elementos expostos ao fogo, com consequências graves para as estruturas. É também conhecido que os elementos finitos convencionais têm uma precisão relativamente fraca para a aproximação do campo de fluxos de calor (quantidades estáticas).

Dos estudos desenvolvidos no projecto foi possível concluir que, para a visão do sistema FireGrid se tornar uma realidade, é necessário desenvolver novas estratégias para a análise das estruturas ao fogo, que permitam ultrapassar as limitações inerentes à adopção dos elementos finitos convencionais. Com vista à materialização deste objectivo, em 2011 foi iniciada uma colaboração entre o centro BRE de engenharia de segurança ao fogo da Universidade de Edimburgo e o grupo de investigação de elementos não-convencionais do IST-UL e FCT-UNL. O primeiro objectivo desta colaboração prende-se com a avaliação do desempenho de vários tipos de elementos finitos não-convencionais para problemas de transferência de calor. O presente trabalho enquadra-se nesta colaboração.

Os problemas de transferência de calor constituem uma classe bastante grande de problemas na engenharia, que se expandem por várias disciplinas incluindo civil, mecânica, química, eléctrica, aeronáutica, etc., e uma grande variedade de métodos tem sido utilizada para a análise destes problemas. Os métodos numéricos que alcançaram o maior grau de popularidade e sucesso foram os métodos das diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos.

Devido à sua grande versatilidade, especialmente à sua capacidade de modelar de forma precisa geometrias arbitrarias das fronteiras e do domínio, aos enormes avanços nos computadores e à precisão dos resultados obtidos, o método dos elementos finitos (MEF) tem cada vez mais vindo a ser o método numérico

escolhido na análise, não só dos problemas mais complexos de transferência de calor, mas na resolução de equações de derivadas parciais em geral.

Este método, originalmente concebido nos anos 40 [35, 18], foi inicialmente desenvolvido para a análise de estruturas aeronáuticas no final dos anos 50 [57]. A potencialidade do método para o uso na análise térmica foi rapidamente reconhecida. As primeiras aplicações do MEF aos problemas de condução de calor apareceram nos anos 60 [64, 63], com as primeiras aplicações destes problemas à análise estrutural reportados em [7, 8, 9]. Desde esta altura, diferentes abordagens têm sido desenvolvidas continuamente.

A abordagem alternativa que se vai estudar aqui consiste na adopção de elementos finitos híbridos, em alternativa aos elementos finitos conformes de temperatura tradicionais.

Adoptando formulações híbridas do método dos elementos finitos pretende-se, por comparação com os elementos convencionais, obter um maior equilíbrio na precisão dos campos aproximados, utilizar menos elementos finitos para a obtenção da mesma precisão e conseguir refinamentos menos pesados computacionalmente e mais adequados para processamento paralelo, prevendo-se assim a diminuição do tempo computacional.

## 1.2 Formulações híbridas de elementos finitos

As formulações híbridas apresentadas aqui são baseadas no trabalho que tem vindo a ser desenvolvido pelo grupo de investigação de análise estrutural do IST-UL [38].

Tal como qualquer outra variante híbrida do método dos elementos finitos, os modelos e formulações que vão ser analisados podem ser directamente relacionados com os trabalhos pioneiros de Veubeke [59] e Pian e Tong [49].

A abordagem seguida aqui tem as suas raízes nas formulações de nós e malha originalmente propostos por Munro e Smith [46], e que deu origem a três formulações de elementos finitos, os elementos finitos híbridos-mistos, híbridos e híbridos-Trefftz [22], que vão ser analisadas de seguida.

O que distingue esta abordagem de outras variantes híbridas do método dos elementos finitos é o uso extensivo de variáveis generalizadas, em detrimento das variáveis nodais. O conceito de nó desempenhou um papel tão importante no desenvolvimento de elementos conformes que foi também adoptado e utilizado no desenvolvimento de elementos híbridos. Contudo, pensa-se que o conceito de nós e das funções de forma relacionadas limita desnecessariamente o desenvolvimento do método dos elementos finitos. Com a adopção de variáveis não nodais, com o custo mínimo de se perder uma interpretação física directa das variáveis dos elementos finitos, passa-se a ter mais flexibilidade na construção das bases de aproximação e mais equilíbrio em termos da precisão do resultado das aproximações do campo das temperaturas e fluxos de calor obtidas. Como as formulações e modelos apresentados aqui são naturalmente hierárquicos e baseados em variáveis generalizadas associadas a funções de aproximação, independentes dos elementos, elas levam naturalmente a processos de refinamento adaptativos, que podem ser explorados ao máximo

usando elementos de ordem mais elevada. Os elementos finitos desenvolvidos deste modo não estão restringidos a nenhuma geometria em particular e são suficientemente ricos para produzir soluções precisas quando implementados em malhas pouco refinadas. Consequentemente, a fase de pré-processamento na implementação dos modelos de elementos finitos apresentados envolve uma estrutura de dados relativamente pequena e não é fortemente dependente em algoritmos de malha eficientes. Para além disto, todas as formulações e modelos podem facilmente incorporar a simulação de efeitos locais relevantes, como temperaturas localizadas ou campos de fluxos de calor singulares.

Independentemente do modelo a ser desenvolvido, podem ser definidos *a priori* diferentes níveis de restrições às bases de aproximação do elemento finito. São considerados três níveis, levando às formulações alternativas híbridas-mistas, híbridas e híbridas-Trefftz. Cada uma destas formulações pode ser escrita para ambos os modelos de temperatura e fluxo de calor. O objectivo principal do desenvolvimento do modelo de temperatura é gerar soluções cinematicamente admissíveis, no domínio, e ele relaciona-se directamente com o modelo de elementos finitos de equilíbrio convencional. Relativamente aos elementos finitos de temperatura conformes ou convencionais, o modelo de fluxo de calor alternativo é construído para produzir soluções estáticamente admissíveis no domínio do elemento.

A formulação híbrida-mista é derivada aproximando simultaneamente dois campos no domínio do elemento (e daí a designação de misto), nomeadamente os fluxos de calor e as temperaturas, e um campo na sua fronteira (daí a designação de híbrido), as temperaturas e os fluxos de calor normais, nos modelos de fluxo de calor e temperaturas, respectivamente. Nesta formulação não é necessário que as funções de aproximação satisfaçam localmente nenhuma das condições de campo fundamentais. Como elas são impostas em média, nem o modelo de fluxo de calor nem o modelo de temperatura da formulação híbrida-mista vão, em geral, ser capazes de gerar soluções estática ou cinematicamente admissíveis. A vantagem desta formulação é, contudo, a sua capacidade de acomodar virtualmente qualquer base de aproximação, independentemente da complexidade do problema em análise. Para explorar melhor esta característica, na computação das matrizes de elementos finitos devem ser usadas bases ortonormais de alta eficiência, como por exemplo sistemas de Wavelets e séries de Walsh (funções digitais), escolhidas de modo a explorar a arquitectura digital do computador. O preço pago por moldar as bases de aproximação ao computador é a necessidade de usar um número relativamente alto de graus de liberdade (gdl) para atingir um nível de precisão elevado, já que estas funções são, em geral, pobres em informação do problema a ser modelado.

Os modelos híbridos de fluxos de calor e temperatura são obtidos directamente dos modelos híbridos-mistos correspondentes, para bases de aproximação que satisfazem localmente a condição de equilíbrio e lei de Fourier, respectivamente. Consequentemente, apenas é necessário aproximar um dos campos no domínio dos elementos, respectivamente, os fluxos de calor e as temperaturas em cada modelo. Em termos de vantagens e desvantagens, o modelo híbrido é um modelo intermédio entre a formulação flexível híbrida-mista e a formulação mais restrita híbrida-Trefftz. A escolha da base no domínio ainda é flexível, permitindo obter



soluções analíticas para a maioria dos integrais, embora a escolha das funções de aproximação seja geralmente mais limitada. Para além de envolver menos graus de liberdade para a mesma ordem nas aproximações, os modelos híbridos de fluxo de calor e temperatura geram, no domínio do elemento, soluções que são localmente estática e cinematicamente admissíveis, respectivamente.

A formulação híbrida-Trefftz é introduzida como o ramo da formulação híbrida obtida por constrangir ainda mais as bases de aproximação no domínio a satisfazerem localmente todas as equações governativas nas suas formas homogéneas (daí a designação de Trefftz). As principais características dos modelos híbridos-Trefftz são a riqueza da informação do problema em análise contida nas bases de aproximação, o que significa que se podem obter soluções altamente precisas usando um número relativamente pequeno de graus de liberdade, e que são robustos a questões que afectam o comportamento dos elementos convencionais (e.g. efeitos locais, topologia e distorção da malha, etc.). Para além disto, eles combinam as características mais interessantes das formulações em elementos finitos convencionais e elementos de fronteira, uma vez que eles produzem sistemas resolventes que são simétricos, esparsos e descritos por expressões de integrais na fronteira, flexibilizando ainda mais a geometria das fronteiras dos elementos finitos. O preço pago, contudo, é a falta de flexibilidade na escolha das funções de aproximação, que podem ser numericamente pesadas de implementar e não permitir integração analítica.

No modelo de temperatura, independentemente da formulação, as condições de fronteira impostas são a continuidade das temperaturas nas fronteiras entre elementos adjacentes, bem como nas fronteiras de Dirichlet que o elemento tenha. O conjunto de condições de fronteira resultante é posteriormente imposto em média usando uma aproximação directa dos fluxos de calor normais ao longo das fronteiras entre elementos adjacentes e de Dirichlet como funções de peso. Por consequência, as condições de continuidade das temperaturas nas fronteiras são impostas em forma fraca e não localmente. Por outro lado, na formulação híbrida e híbrida-Trefftz, os fluxos de calor são obtidos directamente da aproximação da temperatura no domínio do elemento, através da lei de Fourier, e daí a solução ser cinematicamente admissível no domínio.

Pelo contrário, no modelo de fluxo de calor, independentemente da formulação, as condições de fronteira impostas explicitamente são a continuidade dos fluxos de calor normais na fronteiras entre elementos adjacentes, bem como nas fronteiras de Neumann que os elementos possam ter. O conjunto de condições resultante é então imposto em média usando uma aproximação directa das temperaturas, ao longo das fronteiras entre elementos adjacentes e de Neumann, como funções de peso. Assim, nestas fronteiras, a continuidade dos fluxos de calor normais é imposta em forma fraca. Na formulação híbrida e híbrida-Trefftz, a solução é estáticamente admissível no domínio porque a aproximação directa dos fluxos de calor está constrangida a satisfazer localmente a condição de equilíbrio no domínio do elemento.

As formulações híbridas levam a sistemas resolventes com estruturas esparsas e localizadas, uma vez que as variáveis no domínio são estritamente dependentes do elemento e as variáveis na fronteira são partilhadas, no máximo, por pares de elementos ligados. Estas características fazem com que os modelos apresentados



sejam particularmente adequados para processamento paralelo, não havendo soma das contribuições elementares, que tipifica a montagem dos elementos finitos convencionais.

É geralmente aceite que as formulações híbridas são uma das variantes mais precisas do método dos elementos finitos e as vantagens que os elementos híbridos apresentam são vastamente reconhecidas. Contudo eles ainda estão praticamente ausentes dos programas de elementos finitos comerciais. Existem várias razões que explicam este facto, nomeadamente a sua maior complexidade conceptual, a dificuldade em estabelecer bases de aproximação apropriadas, maiores custos computacionais e o balanço delicado necessário entre as aproximações no domínio e na fronteira, o qual pode proporcionar resultados com qualidade excepcional ou comprometer os resultados completamente, tornando o elemento difícil de ser manuseado para o analista inexperiente.

### 1.3 Estado da arte

Relativamente à análise estática de problemas de elasticidade em duas dimensões, foram formulados elementos finitos híbridos de deslocamento em [52] e de tensão em [4, 50]. O mesmo problema foi estudado através de elementos híbridos-Trefftz em [25], no caso do modelo de deslocamento, e em [21] com o modelo de tensão. A análise comparativa dos modelos híbridos-Trefftz, do ponto de vista teórico e em termos de implementação, foi feita em [27, 28]. Nestes artigos foi também analisada a aplicação destes elementos a problemas de optimização topológica e à análise de fendas. Outros artigos que incluem o estudo de efeitos locais são [29, 30], para o caso das fendas e campos de tensão singulares, respectivamente. O conjunto de elementos não-convencionais, híbridos-mistos, híbridos e híbridos-Trefftz, para ambos os modelos de tensão e deslocamento, foi apresentado, para problemas elasto-estáticos, em [23]. O estudo da elasticidade foi estendido à análise tridimensional em [48, 6, 24] e, no contexto da formulação híbrida-mista, foram aplicadas funções digitais (Wavelets) em [12].

Os modelos híbridos de tensão e deslocamento foram aplicados a problemas elastoplásticos em [3], para duas dimensões. A formulação híbrida-Trefftz foi aplicada ao mesmo problema em [34], para o modelo de tensão. O problema em três dimensões foi analisado, através de elementos finitos híbridos-Trefftz, em [11]. A análise dinâmica de problemas de elasticidade com elementos não-convencionais foi estudada usando elementos de deslocamento e tensão híbridos-Trefftz em [20, 14]. A formulação do problema com o conjunto de elementos híbridos foi apresentada em [22].

Do ponto de vista da implementação, a estimativa de erro e o refinamento adaptativo foram explorados em [47, 26, 39] e o processamento paralelo em [5, 15, 16].

Mais recentemente, as formulações híbridas foram estendidas aos materiais multifásicos. Os elementos híbridos-mistos, híbridos e híbridos-Trefftz foram formulados para a análise dinâmica de materiais bifásicos em [33]. Os modelos de tensão e deslocamento dos elementos híbridos-Trefftz do problema foram desenvolvidos em [31] e [32], respectivamente. Os elementos finitos

híbridos-Trefftz foram também aplicados na análise estática dos materiais bifásicos em [44, 45]. A análise está agora a ser estendida aos materiais trifásicos. Relativamente à condução térmica, diversos autores analisaram a equação de Poisson através de formulações alternativas com elementos híbridos e de Trefftz [13, 55, 42, 41, 40, 54, 61]. Foram também aplicados elementos de Trefftz à análise da equação de Poisson para problemas não lineares em [10, 62].

## 1.4 Objectivos do trabalho

Na presente dissertação pretende-se desenvolver o modelo de temperatura das formulações híbrida e híbrida-Trefftz do método dos elementos finitos, e aplicar as respectivas formulações ao problema da transferência de calor por condução em estado estacionário. A formulação convencional correspondente é também apresentada e estudada, para uma posterior comparação entre os elementos.

As formulações desenvolvidas vão ser implementadas em ambiente MATLAB® de modo aos modelos poderem ser validados. Para tal, vão ser efectuados testes para problemas com solução analítica, avaliando-se não só o desempenho dos modelos mas também a convergência para refinamentos  $p$  e  $h$ .

Pretende-se também efectuar estudos comparativos entre as formulações híbridas e híbridas-Trefftz de elementos finitos, e entre estas e a formulação convencional correspondente. Para tal vão ser incluídos exemplos mais complexos.

Para o leitor menos familiarizado com os conceitos desenvolvidos no trabalho, vai ser também demonstrada a resolução de um problema através de cada um dos modelos estudados.

## 1.5 Organização do texto

O texto que vai ser apresentado em seguida está dividido em seis capítulos.

O segundo capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte do capítulo é apresentado o problema de transmissão de calor num corpo. As equações governativas e condições iniciais e de fronteira são determinadas para o caso geral, em que a transferência de calor ocorre por condução, convecção e radiação. Na segunda parte do capítulo particulariza-se a análise ao problema da transferência de calor por condução em regime estacionário. É determinada a solução geral da equação diferencial governativa e é deduzida a forma fraca do problema, a partir da qual são definidas as formulações em elementos finitos dos capítulos posteriores.

No capítulo três é obtida a formulação em elementos finitos conformes de temperatura. O capítulo começa com a dedução das funções de forma correspondentes ao elemento bilinear de quatro nós. As equações dos elementos finitos são obtidas a partir da forma fraca do problema, deduzida no capítulo anterior, aplicando o método de Galerkin, que adopta para as funções de teste as próprias funções de forma, enquanto que a condição de compatibilidade é verificada *a priori*. É analisada a qualidade das soluções obtidas com a formulação

e são apresentados alguns exemplos numéricos, feitos com recurso ao programa ANSYS®.

No quarto capítulo, partindo da forma fraca do problema e aplicando o método de Galerkin é desenvolvida a formulação em elementos finitos híbridos. São adoptadas aproximações independentes para a temperatura, no domínio, e para os fluxos de calor normais, nas fronteiras de Dirichlet e interiores. A implementação da formulação é discutida e o desempenho do modelo, em termos de precisão e convergência para refinamentos  $p$  e  $h$ , é avaliado. Os exemplos numéricos, já efectuados com elementos finitos convencionais, são agora realizados através de elementos finitos híbridos.

A formulação em elementos finitos híbridos-Trefftz é obtida no capítulo cinco. A partir do modelo híbrido analisado no capítulo anterior, restringem-se as funções da base de aproximação da temperatura, no domínio, de modo a satisfazerem localmente a forma homogénea da equação diferencial governativa do problema. O capítulo segue a estrutura adoptada no capítulo quatro, sendo feitas as mesmas análises e testes com a nova formulação.

Finalmente, no capítulo seis são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido e sugerem-se alguns desenvolvimentos futuros.

A título demonstrativo, são incluídos os apêndices A, B e C, onde se encontra exemplificada a resolução de um problema considerando cada uma das formulações abordadas no trabalho, nomeadamente através de elementos finitos convencionais, híbridos e híbridos-Trefftz, respectivamente.



## Capítulo 2

# Apresentação do problema

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma descrição geral do problema da transferência de calor. São definidos os três processos de transmissão de calor, por condução, por convecção e por radiação, para os quais são obtidos os modelos matemáticos, que incluem as equações governativas no domínio e as condições iniciais e de fronteira.

De seguida é analisado o problema da condução de calor em regime estacionário. Inicialmente é determinada a solução geral da equação homogénea no domínio, não sujeita às condições de fronteira, e é determinada uma solução particular para uma situação fisicamente relevante, correspondente à situação em que existe geração interna de uma quantidade de calor constante por unidade de volume do material.

Para a resolução do problema, que inclui a equação governativa no domínio e condições de fronteira de Neumann e Dirichlet, é adoptado o método dos resíduos pesados. Assim, no final do capítulo, é apresentada a forma fraca das mesmas equações, que será usada para derivar as formulações de elementos finitos nos capítulos seguintes.

Existe muita informação publicada sobre o estudo da transferência de calor. Neste estudo, foi seguida a abordagem que é comum às publicações que analisam a transferência de calor para a posterior análise numérica das equações governativas dos diversos fenómenos, como [37, 51, 17, 36, 60].

### 2.2 Transferência de calor

A transmissão de calor pode ser definida como a propagação de energia de uma região para outra de um meio, devido à diferença de temperaturas entre elas. Sempre que existe uma diferença de temperaturas num dado sistema a energia térmica propaga-se, da região de temperatura mais elevada para a de temperatura mais baixa, de acordo com a segunda lei da termodinâmica.

A transferência de calor acontece, por mecanismos diferentes, em todas as fases da matéria (sólida, líquida ou gás), por vezes afectando significativamente as suas

propriedades físicas. O estudo da transmissão de calor centra-se na determinação da distribuição das temperaturas, tanto no espaço como no tempo.

Consideram-se três modos de transmissão de calor: condução, convecção e radiação. A distribuição de temperaturas na matéria pode estar sujeita ao efeito combinado dos três modos de transmissão de calor. Por exemplo, no caso da transmissão de calor em meios sólidos, é típico considerar apenas a condução uma vez que a convecção não existe e a radiação é frequentemente desprezada. Os três modos de transmissão de calor vão agora ser descritos mais pormenorizadamente e as equações matemáticas que os regem derivadas.

### 2.2.1 Condução

A condução é a transferência de energia térmica que ocorre num sólido devido a um gradiente de temperatura. Esta transferência de energia ocorre ao nível molecular ou atómico, com o calor a provocar o aumento de energia nas moléculas, que por sua vez passam alguma dessa energia para as moléculas seguintes e assim sucessivamente, sem haver movimento da massa do material.

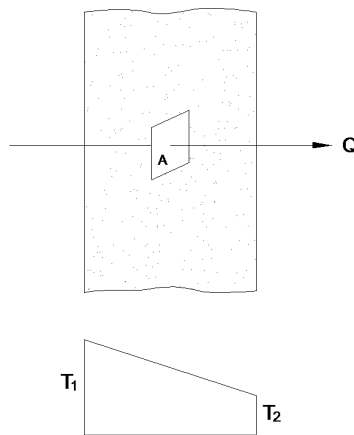


Figura 2.1: Transmissão de calor por condução

Considere-se um sólido em que as superfícies são mantidas a temperaturas diferentes, mas constantes. A quantidade de calor,  $Q$ , que atravessa uma área,  $A$ , (figura 2.1) por unidade de tempo, devido à diferença de temperatura nas superfícies, é dada por

$$Q = -k A \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$  é a normal exterior ao plano do elemento de superfície  $A$ .  $k$  é a condutibilidade térmica do material que depende da sua composição química, temperatura e estado físico. A quantidade de calor que atravessa uma área unitária da superfície, na direcção perpendicular à mesma, por unidade de tempo, é chamada de fluxo de calor,  $q$ , e é dada por

$$q_n = \frac{Q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2)$$

A equação (2.2) é a lei fundamental que rege a transmissão de calor por condução em materiais isotrópicos, denominada de lei de Fourier, segundo a qual o calor transferido é proporcional ao gradiente de temperatura. O sinal negativo nas equações deve-se ao facto de a transferência de energia positiva ocorrer na direcção da diminuição da temperatura, ou seja, na direcção negativa do gradiente de temperatura  $\frac{\partial T}{\partial n}$ .

Os fluxos de calor são quantidades vectoriais. Num referencial cartesiano  $(x, y, z)$ , eles podem ser escritos como

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.3a)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.3b)$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.3c)$$

ou na forma vectorial,

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.4)$$

onde  $\nabla$  é o operador gradiente dado por

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Para materiais anisotrópicos, como a madeira e materiais com estrutura cristalina, a lei de Fourier em coordenadas cartesianas fica

$$q_x = - \left( k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.6a)$$

$$q_y = - \left( k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.6b)$$

$$q_z = - \left( k_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.6c)$$

ou

$$q_{x_i} = - \left( k_{i1} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{i2} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{i3} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.7)$$

onde  $k_{ij}$  é o tensor de condutibilidade térmica.

Vão agora ser determinadas as equações básicas que governam o problema da condução de calor em materiais isotrópicos, ou seja, quando  $k_x = k_y = k_z = k = \text{constante}$ .

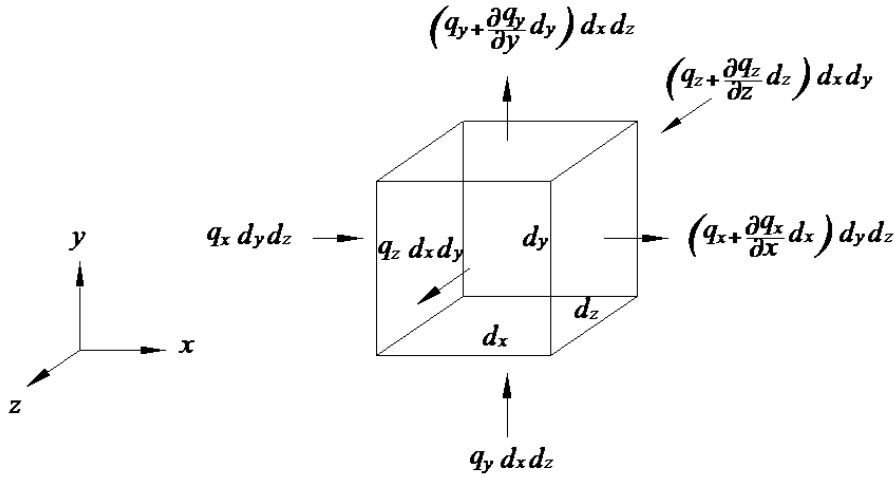


Figura 2.2: Condução térmica num elemento de volume infinitesimal

Considere-se um elemento de volume infinitesimal ( $dx dy dz$ ) cujas faces são paralelas aos eixos coordenados, como se mostra na figura 2.2. Se  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$  forem os fluxos de calor nas direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, por unidade de tempo, a diferença entre o fluxo que sai e o fluxo que entra no elemento,  $\Delta q$ , é dada por

$$\Delta q = dy dz \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_x \right) + dx dz \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - q_y \right) + dx dy \left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - q_z \right) \quad (2.8)$$

Para haver conservação de energia térmica, a soma do fluxo de calor que entra no elemento com o calor gerado internamente,  $Q dx dy dz$ , deve ser igual à soma da variação da energia interna com o fluxo de calor que sai do elemento.

A variação da energia interna é dada pelo calor ganho no elemento na unidade de tempo,  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$ , onde  $t$  é o tempo e  $\rho$  e  $c$  são a massa específica e o calor específico do material, respectivamente.

Fazendo o balanço de energia obtém-se a equação diferencial da condução do calor,

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = Q \quad (2.9)$$

Substituindo-se os fluxos de calor nas direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$  das equações (2.3) na equação (2.9) obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.10)$$

ou na forma vectorial,

$$\nabla^T k \nabla T + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.11)$$



No caso de o material ser homogéneo a equação da condução do calor fica

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k}Q = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12)$$

ou na forma vectorial

$$\nabla^2 T + \frac{1}{k}Q = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.13)$$

onde  $\alpha$  é a difusibilidade térmica do material, definida por

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \quad (2.14)$$

No caso em que o material é homogéneo e não existe geração interna de calor a equação (2.13) reduz-se a

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.15)$$

que é a equação de difusão.

Para materiais homogéneos em regime estacionário a equação da condução de calor é a equação de Poisson,

$$\nabla^2 T + \frac{1}{k}Q = 0 \quad (2.16)$$

Para materiais homogéneos, regime estacionário e não existindo geração interna de calor, a condução de calor é dada pela equação de Laplace,

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.17)$$

Para materiais anisotrópicos a equação da condução de calor em coordenadas cartesianas fica

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

### 2.2.2 Convecção

A convecção processa-se por uma troca de energia calorífica entre partes em movimento de um fluido ou entre este e superfícies sólidas a diferentes temperaturas. Assim, a convecção é devida ao movimento do fluido (figura 2.3). Quando o movimento do fluido ocorre devido a causas externas, como uma ventoinha, a convecção diz-se forçada. Quando o movimento do fluido ocorre devido a diferenças de densidade, a convecção diz-se natural.

As alterações de temperatura num fluido provocam variações de densidade locais, que por sua vez provocam movimento no fluido, originando transmissão de calor por convecção, o que faz com que a determinação da distribuição de temperaturas e do fluxo de calor na convecção, em muitas situações, seja um problema complexo. Para os problemas abordados neste estudo considera-se que a densidade é constante.

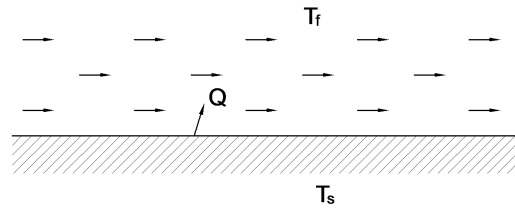


Figura 2.3: Transmissão de calor por convecção de uma superfície para um fluido em movimento

Em muitos problemas da engenharia civil a convecção ocorre através da troca de energia calorífica entre um sólido e o fluido que o rodeia (e.g. as paredes de um edifício e o ar exterior ou interior ao edifício), ou seja, é a troca de calor na fronteira de um sólido e de um fluido. Nestas condições, se o objectivo da análise for modelar apenas a transferência do calor do meio sólido, induzida pelo meio fluido através do fenómeno da convecção, a mesma pode ser modelada como uma condição de fronteira do meio sólido.

De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a transmissão de calor por convecção entre uma superfície à temperatura  $T_s$  e o fluido que a rodeia à temperatura  $T_f$  é dada por

$$q_\Gamma = h(T_s - T_f) \quad (2.19)$$

onde  $q_\Gamma$  e  $h$  são, respectivamente, o fluxo de calor normal à superfície e o coeficiente de transmissão de calor por convecção entre o sólido e o fluido. Tipicamente,  $h$  é determinado experimentalmente uma vez que o seu cálculo apresenta um problema complicado da mecânica dos fluidos, que envolve vários parâmetros, nomeadamente forma e dimensões da superfície sólida, regime da convecção e do tipo de fluido, podendo inclusive alguns desses parâmetros ser dependentes da temperatura.

### 2.2.3 Radiação

Em contraste com os mecanismos de condução e convecção, onde está envolvida a transferência de energia na matéria, o calor também pode ser transferido por ondas electromagnéticas. A parte da radiação electromagnética que se propaga devido à diferença de temperatura é chamada de radiação térmica. Ao contrário da convecção e da condução, a radiação não requer a presença de um meio material para ocorrer. De facto, a transmissão de calor por radiação processa-se mais eficientemente no vácuo.

O fluxo de calor emitido de uma superfície por radiação,  $q$ , é dado pela relação

$$q = \epsilon \sigma T^4 \quad (2.20)$$

onde  $\epsilon$  é a emissividade da superfície,  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann que tem o valor de  $5,669 \times 10^{-8}$  [W/m<sup>2</sup>K<sup>4</sup>] e  $T$  é a temperatura absoluta da superfície do corpo.

Segundo a lei de Stefan-Boltzmann, o fluxo de calor máximo ocorre quando o corpo que se está a considerar é um irradiador perfeito ou corpo negro, para o qual a emissividade é 1. Como os corpos reais não são irradiadores perfeitos, eles só podem emitir uma fracção da radiação emitida pelos corpos negros, ou seja, para uma superfície real,  $\epsilon < 1$ .

Na prática, interessa a radiação entre dois sistemas a diferentes temperaturas. Um problema de radiação simples e frequente ocorre quando existe uma superfície à temperatura  $T_1$  que está completamente envolvida por uma outra de tamanho maior e com temperatura  $T_2$ , como se encontra representado na figura 2.4. Considerando que o gás que separa as superfícies não interfere na transferência de calor por radiação, a quantidade de calor,  $Q$ , trocada é dada por

$$Q = \epsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.21)$$

onde  $\epsilon_1$  e  $A_1$  são a emissividade e a área da superfície do corpo confinado, respectivamente.

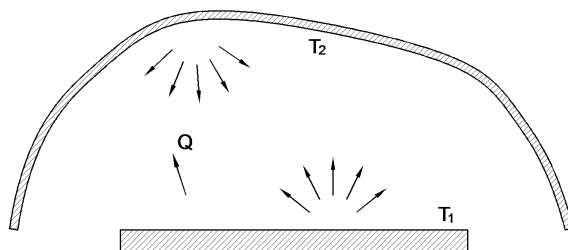


Figura 2.4: Transmissão de calor por radiação entre uma superfície e a sua envolvente

Tendo em conta que a radiação só ocorre quando existem dois sistemas, ela é tipicamente modelada como uma condição de fronteira na equação diferencial da transmissão de calor por condução. O fluxo de calor por radiação é definido a partir da equação (2.21) como

$$q_{\Gamma} = \epsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.22)$$

Outra diferença em relação à condução e convecção é o facto de que o fluxo de calor por radiação é dependente da diferença das temperaturas absolutas elevadas à quarta potência.

### 2.2.4 Condições iniciais e de fronteira

Para a definição completa do problema da transmissão de calor em estudo, além da resolução das equações no domínio, é necessário especificar as condições iniciais e de fronteira.

Relativamente às condições iniciais, deve ser definida a temperatura no instante inicial,  $t = t_0$ , no domínio,  $\Omega$ , como

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z) \quad \text{em } \Omega \quad (2.23)$$

Há três tipos diferentes de condições de fronteira que têm de se considerar, representadas na figura 2.5, e que vão agora ser descritas.

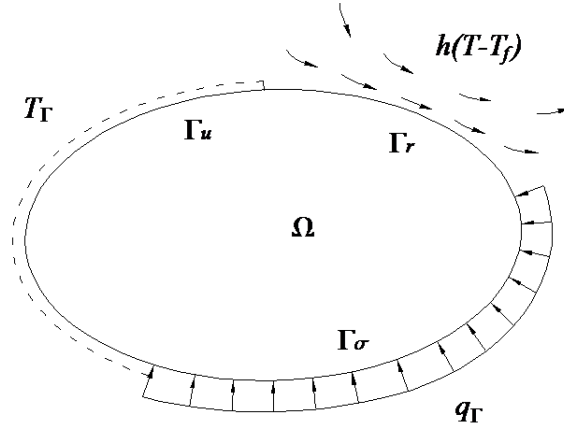


Figura 2.5: Domínio e fronteiras de Neumann, Dirichlet e Robin convectiva

Quando é definido o valor da temperatura na fronteira diz-se que a condição de fronteira é de Dirichlet ou essencial. Este valor da temperatura pode ser constante ou variar ao longo do tempo. A condição de fronteira é dada por

$$T = T_{\Gamma}(x, y, z, t) \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.24)$$

Quando o problema em estudo é estacionário, a condição de fronteira de Dirichlet reduz-se a

$$T = T_{\Gamma}(x, y, z) \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.25)$$

Quando é definido o valor do fluxo de calor na fronteira, na direcção da sua normal exterior,  $n$ , diz-se que a condição de fronteira é de Neumann ou natural. Neste caso, escreve-se a condição de fronteira como

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_{\Gamma} \quad \text{em } \Gamma_{\sigma} \quad (2.26)$$

Como foi visto anteriormente, tanto a transmissão de calor por convecção como por radiação num corpo traduzem-se em condições de fronteira que relacionam os valores do fluxo de calor na respectiva fronteira com os valores da temperatura, equações (2.19) e (2.22). Este tipo de condições de fronteira, onde não se conhecem nem o fluxo de calor nem a temperatura, mas sim uma relação entre eles, dizem-se condições de Robin.

A condição de fronteira de Robin convectiva é dada por

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_f) \quad \text{em } \Gamma_r \quad (2.27)$$

e a condição de fronteira de Robin radiativa por

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \epsilon \sigma (T^4 - T_e^4) \quad \text{em } \Gamma_r \quad (2.28)$$

onde  $T_e$  refere-se à temperatura da superfície envolvente.

É de notar que quando existe uma condição de fronteira de Robin radiativa, a condução de calor passa a ser não linear.

## 2.3 Solução geral do problema estacionário

O caso particular de transmissão de calor que vai ser analisado neste trabalho consiste num corpo sólido com condutibilidade térmica,  $k$ , constante, sujeito a condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, constantes no tempo. A análise contempla apenas o regime estacionário e assume que os campos apenas variam nas direcções  $x$  e  $y$  do referencial cartesiano (i.e. problema plano). Dentro do meio sólido analisado, a transmissão de calor é realizada exclusivamente por condução. Como já foi visto neste capítulo, este problema é regido pela equação de Poisson, no domínio,  $\Omega$ ,

$$\nabla^2 T(x, y) + \frac{1}{k} Q = 0 \quad (2.29)$$

A equação (2.29) é uma equação diferencial não homogénea, de segunda ordem, com coeficientes constantes. A sua solução é dada pela soma da solução geral da equação homogénea,  $T_h$ , com uma solução particular,  $T_p$ ,

$$T(x, y) = T_h(x, y) + T_p(x, y) \quad (2.30)$$

As soluções homogéneas satisfazem a equação de Laplace,

$$\nabla^2 T_h(x, y) = 0 \quad (2.31)$$

e as soluções particulares satisfazem a equação

$$\nabla^2 T_p(x, y) = -\frac{1}{k} Q \quad (2.32)$$

A solução da equação homogénea vai ser obtida de seguida, aplicando-se o método de separação de variáveis à equação (2.31), escrita na forma

$$\frac{\partial^2 T_h(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_h(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (2.33)$$

Admite-se que a função  $T_h(x, y)$  pode ser escrita como o produto de duas funções da forma

$$T_h(x, y) = X(x) Y(y) \quad (2.34)$$

onde  $X(x)$  é uma função que só depende de  $x$  e  $Y(y)$  é uma função que só depende de  $y$ .

Substituindo a definição (2.34) na equação (2.33) obtém-se

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \quad (2.35)$$

A igualdade só é possível se ambos os lados forem iguais à mesma constante,  $c$ . Deste modo,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = c \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = c X(x) \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -c Y(y) \quad (2.38)$$

Se  $c = -\lambda^2 < 0$

$$X(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) \quad (2.39)$$

$$Y(y) = c_3 e^{\lambda y} + c_4 e^{-\lambda y} \quad (2.40)$$

Se  $c = \lambda^2 > 0$

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} \quad (2.41)$$

$$Y(y) = c_3 \sin(\lambda y) + c_4 \cos(\lambda y) \quad (2.42)$$

onde as constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são constantes arbitrárias, que podem ser determinadas através das condições de fronteira.

Dado que na equação (2.35) o sinal negativo tanto pode estar no lado esquerdo como no lado direito da equação, e uma vez que a solução  $T_h(x, y)$  é o produto das funções de cada uma das variáveis separadas, a partir das equações (2.39) a (2.42) obtém-se que o conjunto de soluções possíveis da equação (2.34) é

$$T_h(x, y) = X(x) Y(y) = \left\{ e^{\pm \lambda_n x} \sin(\lambda_n y), e^{\pm \lambda_n x} \cos(\lambda_n y), e^{\pm \lambda_n y} \sin(\lambda_n x), e^{\pm \lambda_n y} \cos(\lambda_n x) \right\} \quad (2.43)$$

ou qualquer combinação linear destas soluções, para  $\lambda_n \in \mathbb{Z}^*$ .

Finalmente, se  $c = 0$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad (2.44)$$

$$Y(y) = c_3 y + c_4 \quad (2.45)$$

onde, mais uma vez,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são constantes arbitrárias, determinadas a partir das condições de contorno. O conjunto de soluções que se obtém neste caso é dado por

$$T_h(x, y) = \{1, x, y, xy\} \quad (2.46)$$

Obviamente, qualquer combinação das soluções (2.46) é também solução.

Para se obter uma solução particular basta determinar uma função que verifique a equação (2.32). As soluções particulares dependem da quantidade de calor gerada no interior do corpo,  $Q(x, y)$ . Neste contexto, é deduzida a expressão analítica de uma solução particular que corresponde à situação em que  $Q = \text{constante}$ , que é a situação típica dos problemas definidos em meios homogêneos. Deste modo, uma solução particular é dada por

$$T_p(x, y) = -\frac{Q}{4k}(x^2 + y^2) \quad (2.47)$$

existindo naturalmente outras soluções possíveis.

## 2.4 Forma fraca do problema estacionário

A forma forte do problema é dada pela equação governativa no domínio do problema,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.48)$$

e pelas condições de fronteira de Dirichlet

$$T(x, y) = T_\Gamma(x, y) \text{ em } \Gamma_u \quad (2.49)$$

e de Neumann

$$n \cdot q(x, y) = q_\Gamma(x, y) \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (2.50)$$

A solução do problema imposto em forma forte implica encontrar uma função,  $T(x, y)$ , que satisfaça a equação diferencial em todos os pontos no interior do domínio e as condições de fronteira em todos os pontos da fronteira. Este tipo de soluções não é possível derivar, no caso geral. Como foi demonstrado na secção anterior, foi possível obter uma solução que satisfaz em forma forte, ou localmente, a equação (2.48) mas não as condições de fronteira. Para obter estas soluções, é necessário recorrer a métodos numéricos, que discretizam os problemas contínuos num número finito de pontos, onde a solução é satisfeita. Neste trabalho vai ser utilizado o método dos elementos finitos.

As formulações em elementos finitos podem ser derivadas a partir de diferentes abordagens, como princípios variacionais ou resíduos pesados. O método variacional requer a existência de um funcional, para o qual é determinado uma função que o torna estacionário. Para muitos problemas achar este funcional não é possível ou é muito complicado. Uma alternativa, que costuma ser usada nos problemas de transferência de calor e que vai ser usada neste trabalho, é a utilização do método dos resíduos pesados, que impõe as equações governativas do problema em forma fraca, ou seja, as equações são impostas em sentido "médio" [36]. Este método pode ser aplicado a qualquer problema regido por um sistema de equações diferenciais e condições de fronteira.

Para se derivar a forma fraca da equação (2.48) começa-se por definir o resíduo ou erro da aproximação,  $R = R(x, y)$ , dado por

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + Q \text{ em } \Omega \quad (2.51)$$

A forma fraca do problema é dada por

$$\int_{\Omega} w R d\Omega = 0 \quad (2.52)$$

ou

$$\int_{\Omega} w \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + Q \right] d\Omega = 0 \quad (2.53)$$

Se  $w = w(x, y)$  for a combinação linear de  $n$  funções arbitrárias,

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^n W_j(x, y) \varphi_j \quad (2.54)$$

onde as funções  $W_j$  são denominadas de funções de teste e  $\varphi_j$  são coeficientes constantes a serem determinados, e se se determinar um campo de temperaturas  $\bar{T}(x, y)$  que satisfaça a equação (2.53), para qualquer que seja a função arbitrária  $W_j$ , então este campo é a solução da equação (2.48), e o resíduo é nulo.

A equação (2.53) não tem em conta a influência das fronteiras do elemento. Como tal, vai ser usada a integração por partes para reduzir a ordem das derivadas e para introduzir a influência das fronteiras de Neumann. As condições de fronteira de Dirichlet serão consideradas posteriormente.

Segundo o Teorema de Green,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \\ & - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \int_{\Gamma} w k \frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.55)$$

Substituindo a equação (2.55) e introduzindo a condição de fronteira de Neumann (2.50) na equação (2.53), esta fica

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - w Q \right) d\Omega + \int_{\Gamma} w k \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{\sigma}} w (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{q}} - q_{\Gamma}) d\Gamma_{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Substituindo as definições

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_{\sigma} \quad (2.57)$$

e



$$k \frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathbf{n}} = k \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} n_y \right) = -\mathbf{n} \bar{q} \quad (2.58)$$

na equação (2.56) obtém-se

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_u} w \mathbf{n} \bar{q} d\Gamma_u - \int_{\Gamma_\sigma} w \mathbf{n} \bar{q} d\Gamma_\sigma + \\ \int_{\Gamma_\sigma} w (\mathbf{n} \bar{q} - q_\Gamma) d\Gamma_\sigma + \int_{\Omega} w Q d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

e, finalmente, a expressão das equações governativas do problema na forma fraca fica

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^T k \nabla \bar{T} d\Omega + \int_{\Gamma_u} w \mathbf{n} \bar{q} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_\sigma} w q_\Gamma d\Gamma_\sigma - \int_{\Omega} w Q d\Omega = 0 \quad (2.60)$$

É a partir desta equação que vão ser derivadas as diferentes formulações de elementos finitos desenvolvidas neste trabalho.



## Capítulo 3

# Elementos finitos convencionais

### 3.1 Introdução

É possível calcular soluções analíticas para as equações governativas apresentadas no capítulo anterior, para problemas de geometria e condições de fronteira simples. Na maioria dos problemas a geometria e condições de fronteira não são simples e é necessário recorrer a análises complexas. O método dos elementos finitos é a ferramenta mais popular para obter soluções aproximadas dessas equações. Neste método, o domínio é dividido em elementos pequenos, dentro dos quais se aproxima um campo desconhecido, obtendo-se um sistema algébrico, cujas incógnitas permitem a construção do campo aproximado.

Neste capítulo aplica-se o método dos elementos finitos ao problema de transmissão de calor por condução, no plano, em regime estacionário, utilizando elementos conformes de temperatura, aqui denominados de convencionais. Para a obtenção da forma integral do problema, a equação do problema em forma fraca é imposta no domínio e fronteiras de cada elemento, utilizando o método de Galerkin, e as condições de fronteira de Dirichlet são aplicadas localmente, através da escolha das funções de forma. As aproximações são feitas utilizando funções de forma, simples, que são deduzidas aqui para o elemento bilinear rectangular de quatro nós.

É avaliada a qualidade da solução, que depende do número de elementos e do número de funções de aproximação utilizadas em cada elemento. São ainda apresentados dois exemplos, recorrendo ao programa ANSYS®.

A formulação apresentada neste capítulo está presente numa extensa bibliografia, como são exemplos [37, 51, 17, 36, 65, 43], a qual foi consultada.

### 3.2 Discretização

No método dos elementos finitos, o domínio é dividido em subdomínios, mais pequenos e simples, denominados de elementos, tipicamente convexos (poliedros ou polígonos), ligados entre si através de nós (figura 3.1).

As equações do problema em forma fraca, vistas no capítulo anterior, continuam válidas e são aplicadas no domínio de cada elemento, utilizando funções de teste simples. É necessário complementar estas equações do domínio com condições

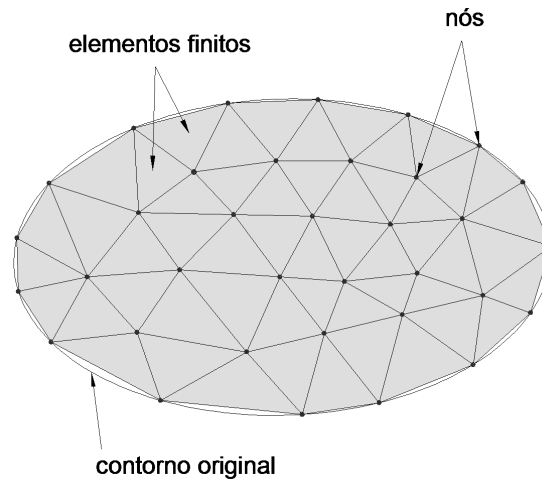


Figura 3.1: Malha de elementos finitos

de fronteira entre elementos adjacentes, ou interiores, adequadas. Assim, ao longo de uma fronteira entre dois elementos adjacentes,  $\Gamma_{int}$ , elemento 1 e 2, deve-se verificar que

$$T_{\Gamma_{int}}^{(1)} = T_{\Gamma_{int}}^{(2)} \quad (3.1)$$

e

$$\mathbf{n}_{\Gamma_{int}}^{(1)} \mathbf{q}_{\Gamma_{int}}^{(1)} + \mathbf{n}_{\Gamma_{int}}^{(2)} \mathbf{q}_{\Gamma_{int}}^{(2)} = 0 \quad (3.2)$$

Nos elementos finitos convencionais, o campo de temperaturas é aproximado no domínio de cada elemento através de funções simples, de modo a que as condições de fronteira de temperaturas (2.25) e (3.1) sejam perfeitamente recuperadas nos nós do corpo e nas suas fronteiras interiores, respectivamente. Para tal, optando por usar funções de forma polinomiais, é necessário que sejam escolhidas funções de grau  $(i - 1)$  em elementos cujas fronteiras tenham  $i$  nós, garantindo-se assim que a solução é única. Deste modo, as funções de aproximação ficam unicamente definidas pelo número de nós do elemento, não podendo ser escolhidas livremente. Para a aproximação do campo das temperaturas, sendo este um campo escalar, o número de nós corresponde ao número de graus de liberdade do sistema. As condições de equilíbrio dos fluxos de calor (2.26) e (3.2) não são, em geral, respeitadas.

A aproximação do campo de temperaturas num elemento com  $n$  graus de liberdade é dada por

$$\bar{T}(x, y) = \sum_{i=1}^n U_i(x, y) \phi_i = \mathbf{U}(x, y) \boldsymbol{\phi} \quad (3.3)$$

onde  $U_i$  são as funções de forma e  $\phi_i$  são os valores da temperatura nos nós do elemento.

As formas mais comuns dos elementos finitos convencionais são as triangulares e

quadriláterais. Dentro de cada tipo de elemento é possível definir elementos com mais ou menos nós, e consequentemente funções de aproximação de grau mais ou menos elevado.

De seguida vai ser estudado o elemento bilinear rectangular de quatro nós, com lados de comprimento  $2a$  na direcção  $x$  e  $2b$  na direcção  $y$ , representado na figura 3.2.

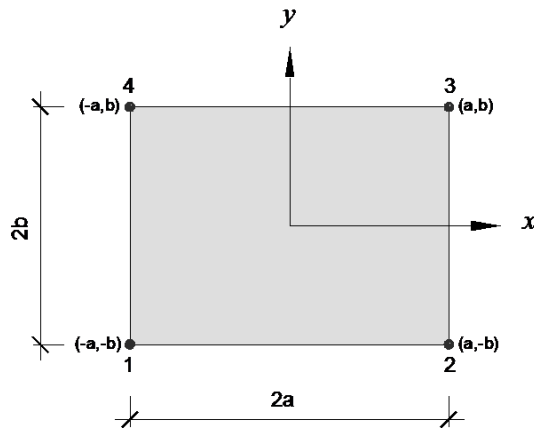


Figura 3.2: Elemento bilinear rectangular de 4 nós

O campo de temperaturas num elemento é definido como uma função das temperaturas nodais. Assim, para o elemento em estudo, a aproximação da temperatura é dada por

$$\bar{T}(x, y) = \sum_{i=1}^4 U_i(x, y) \phi_i = \left\{ \begin{matrix} U_1(x, y) & U_2(x, y) & U_3(x, y) & U_4(x, y) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{matrix} \right\} \quad (3.4)$$

ou

$$\bar{T}(x, y) = U_1(x, y) \phi_1 + U_2(x, y) \phi_2 + U_3(x, y) \phi_3 + U_4(x, y) \phi_4 \quad (3.5)$$

Para a recuperação exacta das temperaturas nodais é necessário que

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}(-a, -b) = U_1(-a, -b) \phi_1 + U_2(-a, -b) \phi_2 + U_3(-a, -b) \phi_3 + U_4(-a, -b) \phi_4 = \phi_1 \\ \bar{T}(a, -b) = U_1(a, -b) \phi_1 + U_2(a, -b) \phi_2 + U_3(a, -b) \phi_3 + U_4(a, -b) \phi_4 = \phi_2 \\ \bar{T}(a, b) = U_1(a, b) \phi_1 + U_2(a, b) \phi_2 + U_3(a, b) \phi_3 + U_4(a, b) \phi_4 = \phi_3 \\ \bar{T}(-a, b) = U_1(-a, b) \phi_1 + U_2(-a, b) \phi_2 + U_3(-a, b) \phi_3 + U_4(-a, b) \phi_4 = \phi_4 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

As funções de forma  $U_i$  são construídas de modo a que o parâmetro  $\phi_i$  seja igual ao valor da função  $\bar{T}(x, y)$  no nó  $i$ . Desta forma, o sistema (3.6) só pode ser satisfeito se para cada função  $U_i$ ,  $U_i(x_i, y_i) = 1$  e  $U_i(x_j, y_j) = 0$ , para qualquer  $j \neq i$ , havendo assim tantas condições como nós para a determinação

das funções de forma. Uma vez que as funções de forma são em  $x$  e em  $y$ , os seus termos devem ser retirados do triângulo de Pascal e devem ser escolhidos de modo a manter a isotropia geométrica do elemento, como se mostra a sombreado na figura 3.3.

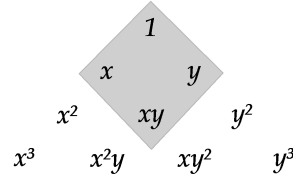


Figura 3.3: Termos do triângulo de Pascal usados nas funções de interpolação

Assim, para se conseguir determinar as funções  $U_i$  a partir das quatro condições (3.6), elas devem ser da forma

$$U_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy \quad (3.7)$$

O elemento é denominado bilinear porque as funções de forma  $U_i$  são o produto de polinómios lineares em cada uma das duas direcções cartesianas. Para garantir a continuidade do campo de temperaturas ao longo das fronteiras de elementos adjacentes as funções de forma devem ter continuidade  $C^0$ . A solução  $\bar{T}(x, y)$  será, assim, de classe  $C^0$  em todo o domínio. É de notar que esta continuidade não foi garantida para os fluxos de calor.

Para o nó 1 a função de forma está representada na figura 3.4 e é dada por

$$U_1(x, y) = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 xy \quad (3.8)$$

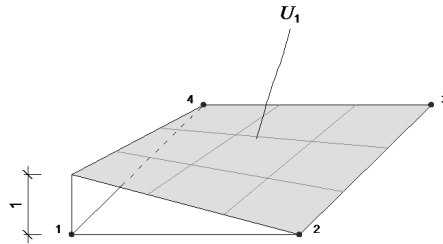


Figura 3.4: Função de forma  $U_1$

As condições que permitem obter os valores dos coeficientes  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  e  $d_1$  são:

$$\begin{cases} U_1(-a, -b) = 1 \\ U_1(a, -b) = 0 \\ U_1(a, b) = 0 \\ U_1(-a, b) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Substituindo a definição (3.8) nas equações (3.9), obtém-se

$$\begin{cases} U_1(-a, -b) = a_1 - b_1a - c_1b + d_1ab = 1 \\ U_1(a, -b) = a_1 + b_1a - c_1b - d_1ab = 0 \\ U_1(a, b) = a_1 + b_1a + c_1b + d_1ab = 0 \\ U_1(-a, b) = a_1 - b_1a + c_1b - d_1ab = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Resolvendo o sistema obtêm-se as constantes

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4a} \\ -\frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4ab} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

que, substituídas na definição (3.8), determinam a função de forma do nó 1,

$$U_1(x, y) = \frac{1}{4ab} (a-x)(b-y) \quad (3.13)$$

Para os nós 2, 3 e 4, as funções de forma são dadas, respectivamente, por

$$U_2(x, y) = a_2 + b_2x + c_2y + d_2xy \quad (3.14)$$

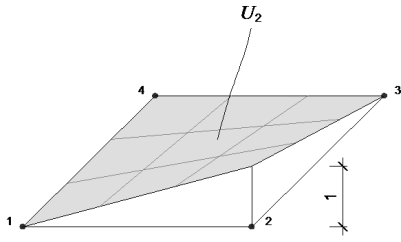
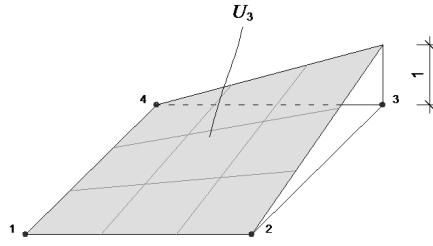
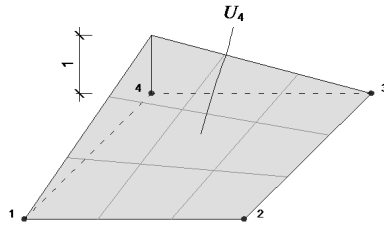
$$U_3(x, y) = a_3 + b_3x + c_3y + d_3xy \quad (3.15)$$

$$U_4(x, y) = a_4 + b_4x + c_4y + d_4xy \quad (3.16)$$

e encontram-se representadas nas figuras 3.5 a 3.7.

Os coeficientes das funções de forma  $U_2$ ,  $U_3$  e  $U_4$  são determinados, seguindo o mesmo raciocínio utilizado na determinação dos coeficientes da função de forma  $U_1$ , a partir das condições (3.17), (3.18) e (3.19), respectivamente.

$$\begin{cases} U_2(-a, -b) = 0 \\ U_2(a, -b) = 1 \\ U_2(a, b) = 0 \\ U_2(-a, b) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Figura 3.5: Função de forma  $U_2$ Figura 3.6: Função de forma  $U_3$ Figura 3.7: Função de forma  $U_4$ 

$$\begin{cases} U_3(-a, -b) = 0 \\ U_3(a, -b) = 0 \\ U_3(a, b) = 1 \\ U_3(-a, b) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} U_4(-a, -b) = 0 \\ U_4(a, -b) = 0 \\ U_4(a, b) = 0 \\ U_4(-a, b) = 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

As funções de forma são dadas por,

$$U_2(x, y) = \frac{1}{4ab} (a+x)(b-y) \quad (3.20)$$

$$U_3(x, y) = \frac{1}{4ab} (a+x)(b+y) \quad (3.21)$$

$$U_4(x, y) = \frac{1}{4ab} (a-x)(b+y) \quad (3.22)$$

É possível escrever uma expressão geral das funções de forma, em coordenadas cartesianas, como

$$U_i(x, y) = \frac{1}{4ab} \left( a + \frac{x_i}{a}x \right) \left( b + \frac{y_i}{b}y \right) \quad (3.23)$$

onde  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas do nó  $i$ .



### 3.3 Equação dos elementos

O ponto de partida do MEF é a forma fraca das equações governativas, descrita na secção 2.4. A aproximação da temperatura já foi definida na secção anterior e é dada pela equação (3.3). Resta agora escolher a função teste  $w(x, y)$ , presente na equação (2.60). No MEF, ela é definida como uma combinação linear de tantas funções linearmente independentes,  $W_j(x, y)$ , quantos graus de liberdade no domínio do elemento,

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^n W_j(x, y) \varphi_j = \mathbf{W}(x, y) \boldsymbol{\varphi} \quad (3.24)$$

onde  $\varphi_j$  são os pesos associados às respectivas funções. Note-se que ainda não foi aplicada qualquer restrição à escolha destas funções.

Existem vários métodos para a escolha das funções da base  $\mathbf{W}$ . Os dois principais são o método da colocação e o método de Galerkin [65].

No método da colocação, adoptam-se para as funções de teste a função delta de Dirac, tal que

$$W_j(x, y) = \delta_j(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) = (x_j, y_j) \\ 0 & \text{se } (x, y) \neq (x_j, y_j) \end{cases}$$

Tendo em conta que

$$\int_{\Omega} \delta_j(x, y) f(x, y) d\Omega = f(x_j, y_j)$$

esta escolha corresponde a impôr que o resíduo é nulo em pontos discretos do domínio.

No método de Galerkin, adoptam-se para as funções de teste as funções utilizadas para a aproximação do campo de temperaturas (funções de forma), ou seja,  $\mathbf{W}(x, y) = \mathbf{U}(x, y)$ . Este método conduz ao aparecimento de matrizes simétricas, o que é uma vantagem do ponto de vista computacional, e o que faz com que este seja o método mais utilizado na formulação do método dos elementos finitos, sendo também a estratégia adoptada neste trabalho.

Sendo que  $\mathbf{W}(x, y) = \mathbf{U}(x, y)$ , a forma fraca (2.60) tem a condição de fronteira de Dirichlet localmente satisfeita e reduz-se a

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^T k \nabla T d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} w q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma} - \int_{\Omega} w Q d\Omega = 0 \quad (3.25)$$

Substituindo as aproximações (3.5) e (3.24) na equação (3.25) obtém-se

$$\boldsymbol{\varphi}^T \left[ \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{W})^T k \nabla \mathbf{U} d\Omega \boldsymbol{\phi} + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{W}^T q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma} - \int_{\Omega} \mathbf{W}^T Q d\Omega \right] = 0 \quad (3.26)$$

Pelo método de Galerkin, a equação (3.26) pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\varphi}^T \left[ \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{U})^T k \nabla \mathbf{U} d\Omega \boldsymbol{\phi} + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{U}^T q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma} - \int_{\Omega} \mathbf{U}^T Q d\Omega \right] = 0 \quad (3.27)$$

Visto que a equação (3.27) deve ser satisfeita para quaisquer pesos  $\varphi_j$  das funções de teste, os termos entre parêntesis devem ser todos nulos, logo

$$\int_{\Omega} (\nabla U)^T k \nabla U d\Omega \phi + \int_{\Gamma_{\sigma}} U^T q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma} - \int_{\Omega} U^T Q d\Omega = 0 \quad (3.28)$$

A equação anterior pode ser escrita como um sistema algébrico linear da forma

$$K \phi = b - q_{\Gamma} \quad (3.29)$$

com

$$K = \int_{\Omega} (\nabla U)^T k \nabla U d\Omega \quad (3.30)$$

$$b = \int_{\Omega} U^T Q d\Omega \quad (3.31)$$

$$q_{\Gamma} = \int_{\Gamma_{\sigma}} U^T q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma} \quad (3.32)$$

ou

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla U_j)^T k \nabla U_i d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x} k \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial U_j}{\partial y} k \frac{\partial U_i}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.33)$$

$$b_j = \int_{\Omega} U_j Q d\Omega \quad (3.34)$$

$$q_{\Gamma_j} = \int_{\Gamma_{\sigma}} U_j q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma} \quad (3.35)$$

A título ilustrativo, a equação dos elementos finitos convencionais (3.29) vai ser aplicada ao elemento bilinear rectangular de quatro nós, representado na figura 3.2. As funções de forma do elemento já foram determinadas e são dadas por

$$U^T(x, y) = \begin{Bmatrix} U_1(x, y) \\ U_2(x, y) \\ U_3(x, y) \\ U_4(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{Bmatrix} (a-x)(b-y) \\ (a+x)(b-y) \\ (a+x)(b+y) \\ (a-x)(b+y) \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Para a determinação da matriz de condutibilidade  $K$ , começa-se por definir o gradiente da base  $U$ ,  $\nabla U$ , dado por

$$\nabla U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} & \frac{\partial U_2}{\partial x} & \frac{\partial U_3}{\partial x} & \frac{\partial U_4}{\partial x} \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} & \frac{\partial U_2}{\partial y} & \frac{\partial U_3}{\partial y} & \frac{\partial U_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} y-b & b-y & b+y & -b-y \\ x-a & -a-x & a+x & a-x \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Assim, a equação (3.30) fica

$$\mathbf{K} = \frac{k}{(4ab)^2} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} y-b & x-a \\ b-y & -a-x \\ b+y & a+x \\ -b-y & a-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y-b & b-y & b+y & -b-y \\ x-a & -a-x & a+x & a-x \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.38)$$

obtendo-se a matriz de condutibilidade

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} \frac{(a^2+b^2)}{3ab} & \frac{a}{6b} - \frac{b}{3a} & -\frac{(a^2+b^2)}{6ab} & \frac{b}{6a} - \frac{a}{3b} \\ \frac{a}{6b} - \frac{b}{3a} & \frac{(a^2+b^2)}{3ab} & \frac{b}{6a} - \frac{a}{3b} & -\frac{(a^2+b^2)}{6ab} \\ -\frac{(a^2+b^2)}{6ab} & \frac{b}{6a} - \frac{a}{3b} & \frac{(a^2+b^2)}{3ab} & \frac{a}{6b} - \frac{b}{3a} \\ \frac{b}{6a} - \frac{a}{3b} & -\frac{(a^2+b^2)}{6ab} & \frac{a}{6b} - \frac{b}{3a} & \frac{(a^2+b^2)}{3ab} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

O vector do calor gerado internamente,  $\mathbf{b}$ , da equação (3.31), para  $Q$  constante, fica

$$\mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{U}^T Q d\Omega = Q \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} U_1(x,y) \\ U_2(x,y) \\ U_3(x,y) \\ U_4(x,y) \end{Bmatrix} d\Omega = Q ab \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Fisicamente, os termos do vector  $\mathbf{b}$  representam a resultante do calor produzido na parte do domínio correspondente ao respectivo nó. Neste caso, para qualquer nó  $i$ , a parte do domínio correspondente é dada por  $\Omega_i = \frac{1}{4}\Omega = ab$ .

O vector dos fluxos de calor aplicados,  $\mathbf{q}_{\Gamma}$ , da equação (3.32) depende da localização da fronteira de Neumann no elemento. Se, por exemplo, na fronteira  $\Gamma_{12}$  (figura 3.2) estiver aplicado um fluxo de calor constante,  $q_{\Gamma}$ , então  $U_3 = U_4 = 0$  e a equação (3.32) fica

$$\mathbf{q}_{\Gamma} = \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{U}^T q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma} = q_{\Gamma} \int_{\Gamma_{12}} \begin{Bmatrix} U_1(x,y) \\ U_2(x,y) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\Gamma = q_{\Gamma} a \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

Os termos do vector  $\mathbf{q}_{\Gamma}$  representam a resultante do fluxo de calor aplicado na parte da fronteira de Neumann correspondente ao respectivo nó. Neste caso em particular, para um fluxo de calor constante, a parte da fronteira correspondente aos nós  $i$  e  $j$  é dada por  $\Gamma_i = \Gamma_j = \frac{1}{2}L_{ij} = a$ , onde  $L_{ij}$  é o comprimento da fronteira  $\Gamma_{ij}$ .

Para além do campo de temperaturas, é possível obter uma aproximação do campo dos fluxos de calor através da Lei de Fourier (2.4),

$$\bar{\mathbf{q}}(x,y) = -k \nabla \bar{T}(x,y) = -k [\nabla U(x,y)] \phi \quad (3.42)$$

De notar que a aproximação (3.42) não é independente da aproximação do campo de temperaturas.

As equações deduzidas até agora são restritas a um único elemento. Quando o domínio está dividido em vários elementos, a equação de equilíbrio (3.2) deve ser imposta nas fronteiras interiores. A imposição é feita em forma fraca, utilizando as funções das bases  $U$  para ponderação. Para dois elementos adjacentes, 1 e 2,

$$\int_{\Gamma_{int}} U_{\Gamma_{int}}^{(1)T} q_{\Gamma_{int}}^{(1)} d\Gamma_{int} + \int_{\Gamma_{int}} U_{\Gamma_{int}}^{(2)T} q_{\Gamma_{int}}^{(2)} d\Gamma_{int} = 0 \quad (3.43)$$

Na fronteira interior,  $U^{(1)} = U^{(2)}$  e consequentemente  $q_{\Gamma_{int}}^{(1)} + q_{\Gamma_{int}}^{(2)} = 0$ . Assim, o sistema global do MEF passa a ser dado por

$$K^G \phi^G = b^G - q_{\Gamma}^G \quad (3.44)$$

com

$$K^G = \sum_{e=1}^{N_{el}} K^{(e)} \quad (3.45)$$

$$b^G = \sum_{e=1}^{N_{el}} b^{(e)} \quad (3.46)$$

$$q_{\Gamma}^G = \sum_{e=1}^{N_{el}} q_{\Gamma}^{(e)} \quad (3.47)$$

onde  $N_{el}$  é o número total de elementos no domínio. Para se poderem aplicar os somatórios anteriores é necessário alterar a numeração local dos graus de liberdade do elemento para a numeração global. Quando o mesmo nó é comum a vários elementos, é necessário somar as contribuições dos respectivos elementos. A matriz  $K^G$  é simétrica, positivamente definida, e a sua dimensão é igual ao número de graus de liberdade ou nós global, uma vez que na análise de transferência de calor em cada nó só se tem um grau de liberdade. Na matriz  $K^G$  os coeficientes  $K_{ii}^G$  são a soma de todos os elementos concorrentes no nó  $i$ , e os coeficientes  $K_{ij}^G$  são zero a não ser que pelo menos um elemento esteja ligado a ambos os nós  $i$  e  $j$ . Esta organização da matriz faz com que os elementos fiquem entrelaçados, e faz também com que, quando existem muitos elementos, a matriz tenha muitos coeficientes nulos. Devido à condição de conformidade das temperaturas entre elementos adjacentes, não se podem ter elementos com funções de forma de graus diferentes na mesma malha. Para a resolução do sistema, é possível organizar a numeração dos nós de modo a que a matriz  $K^G$  seja uma matriz banda, ou seja, com os coeficientes não nulos concentrados à volta da diagonal principal.

Como foi mostrado, o método dos elementos finitos consegue reduzir as equações diferenciais governativas do problema a um sistema algébrico linear. Todas as quantidades que entram no sistema dependem apenas de um único elemento, o que permite que os cálculos possam ser feitos ao nível de cada elemento, até à fase de construção do sistema governativo. Esta fase é também possível fazer seguindo as regras enunciadas acima, que dependem apenas da geometria da estrutura. Assim, o método é simples de utilizar e pode ser implementado

computacionalmente, sendo apenas necessário definir o tipo de elemento e geometria da malha.

No apêndice A encontra-se um exemplo da aplicação da formulação a uma estrutura de quatro elementos sujeita a um conjunto de temperaturas e fluxos de calor impostos.

### 3.4 Qualidade da solução

À medida que o número de graus de liberdade do sistema aumenta, a solução aproximada obtida pelo MEF deve convergir para a solução exacta. Para que ocorra esta convergência, é necessário que as funções de forma consigam recuperar a solução exacta, quando a dimensão do elemento tende para zero. Admitindo que, neste caso, o elemento tem os nós todos com a mesma temperatura, resulta que uma condição necessária para a convergência é que o elemento seja capaz de recuperar exactamente uma solução  $T(x, y) = \tau = \text{constante}$ .

Considere-se um elemento finito no qual a distribuição da temperatura é constante. Se na equação da aproximação da temperatura (3.3) se substituir o vector  $\phi^T = \{\tau \ \tau \ \dots \ \tau\}$  correspondente e as funções de forma,  $U_i$ , obtém-se

$$\bar{T} = \{ U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n \} \begin{Bmatrix} \tau \\ \tau \\ \vdots \\ \tau \end{Bmatrix} = \tau \quad (3.48)$$

ou seja, para um elemento de  $n$  nós

$$\sum_{i=1}^n U_i(x, y) = 1 \quad (3.49)$$

Esta propriedade chama-se de partição da unidade. É fácil ver que se somar as funções de forma correspondentes ao elemento bilinear de quatro nós, determinadas anteriormente e dadas pela expressão geral (3.23), obtém-se a unidade, logo a condição da partição da unidade fica satisfeita.

Para além desta condição, deve-se notar que a integração da forma fraca (2.60) apenas é possível se as funções de forma  $U_i$  tiverem, no mínimo, continuidade  $C^0$  (naturalmente, as funções polinomiais satisfazem também este requerimento).

Não há nenhum método ou regra que permita, *a priori*, criar um modelo de elementos finitos que garanta um grau específico de precisão. No entanto, a convergência da solução pode ser aumentada recorrendo ao refinamento dos modelos. Existem situações que requerem refinamentos maiores, como nas zonas com temperaturas localizadas ou campos de fluxos de calor singulares, nas zonas de descontinuidade geométrica ou dos materiais, qualquer zona onde seja necessário obter resultados de alto nível de precisão, etc. Existem dois tipos principais de refinamento que podem ser feitos, nomeadamente o refinamento  $h$  e o refinamento  $p$ . No refinamento  $h$  aumenta-se o número de elementos na

malha, ficando as dimensões dos elementos mais pequenas. No refinamento  $p$  aumenta-se a ordem dos polinómios das funções de forma nos elementos.

O erro da solução depende de vários factores, mas é possível determinar uma boa estimativa da ordem da diminuição do erro através da seguinte expressão [65]:

$$O = h^{p+1} \quad (3.50)$$

onde  $h$  representa o número de vezes que a dimensão máxima do elemento é reduzida e  $p$  é o grau das funções de aproximação que se usam nos elementos. Por exemplo, reduzindo para metade a dimensão dos elementos lineares derivados na secção 3.2, é expectável uma redução do erro da ordem das  $2^{1+1} = 4$  vezes. No entanto a estimativa do erro não é o único factor a ter em conta ao escolher qual o refinamento a adoptar para melhorar o modelo de elementos finitos. Tanto o refinamento  $p$  como o refinamento  $h$  têm vantagens e desvantagens de utilização, como se encontra descrito nas tabelas 3.1 e 3.2.

Tabela 3.1: Prós e contras do refinamento  $h$

Refinamento $h$	
Prós	Contras
Permite fazer refinamento localizado	Taxa de convergência menor do que com refinamento $p$
É computacionalmente fácil de implementar um processo adaptativo de refinamento	Para se chegar à mesma qualidade de aproximação, o número de gdl fica maior do que no caso do refinamento $p$
	A representação das quantidades estáticas (fluxos de calor, tensões) é relativamente fraca (que por vezes, como na mecânica, são as quantidades que mais interessam)

No caso de programas comerciais, a escolha do refinamento a utilizar é tipicamente condicionada pelas tipologias dos elementos implementados. Nesses programas, é raro haver elementos com mais de nove nós, o que deixa o utilizador com flexibilidade apenas no controlo do refinamento  $h$ . Os métodos de refinamento podem também ser usados em conjunto, sendo a convergência maior neste caso do que com cada um dos refinamentos considerados individualmente. Na escolha do refinamento a adoptar é necessário ter em conta o tipo de problema em estudo e o custo de todo o processo de resolução.

Independentemente do grau de refinamento, a aproximação do campo das temperaturas vai ter sempre uma qualidade superior à da aproximação do campo dos fluxos de calor, uma vez que a aproximação dos fluxos é dependente da aproximação da temperatura, e a continuidade das temperaturas entre

Tabela 3.2: Prós e contras do refinamento  $p$ 

Refinamento $p$	
Prós	Contras
Taxa de convergência maior do que com refinamento $h$	O refinamento $p$ obriga à reformulação do elemento
Os sistemas governativos possuem dimensões mais pequenas do que com refinamento $h$	Tipicamente, é difícil usar elementos diferentes na mesma estrutura, o que dificulta o refinamento localizado
Boa representação dos fluxos de calor (quantidades estáticas)	

elementos adjacentes é imposta em forma forte, enquanto que a continuidade dos fluxos de calor entre elementos adjacentes é imposta em forma fraca. Esta característica é uma limitação em áreas como a mecânica, onde as quantidades "estáticas" (tensões) são as que mais importam.

### 3.5 Exemplos numéricos

Para a análise e posterior comparação com outros modelos, foram feitos testes numéricos com elementos convencionais, através do programa ANSYS® [2].

Foram considerados dois problemas independentes, denominados de teste 1 e teste 2, os quais vão ser descritos de seguida. Em ambos os testes adoptou-se um domínio quadrado, de lado unitário,  $L = 1.0$  [m], e elementos finitos rectangulares de quatro nós em toda a malha. Para a condutibilidade térmica do material considerou-se o valor de  $k = 1.0$  [W/m°C]. Em todos os testes foi analisada a distribuição da temperatura,  $T$ , fluxo de calor na direcção  $x$ ,  $q_x$ , e fluxo de calor na direcção  $y$ ,  $q_y$ .

No teste 1 foi aplicada uma temperatura na fronteira superior de  $T = 20.0$  [°C] e nas restantes fronteiras de  $T = 0.0$  [°C]. A quantidade de calor gerada internamente foi considerada nula,  $Q = 0.0$  [W/m³]. O modelo encontra-se representado na figura 3.8.

Foram realizados vários testes de modo a permitirem uma posterior comparação com outros modelos de elementos finitos. Fez-se um primeiro teste, teste 1.1, com uma malha de 324 elementos, num total de 361 graus de liberdade. Os resultados obtidos encontram-se na figura 3.9.

No teste 1 há uma descontinuidade do campo das temperaturas nos cantos superiores do corpo, devido à idealização do problema físico. Assim, os fluxos de calor, em ambas as direcções, vão ter singularidades nestes pontos.

Para a obtenção de soluções com maior precisão, foi feito um segundo teste (teste 1.2), onde se procedeu ao refinamento da malha. Foi utilizada uma malha

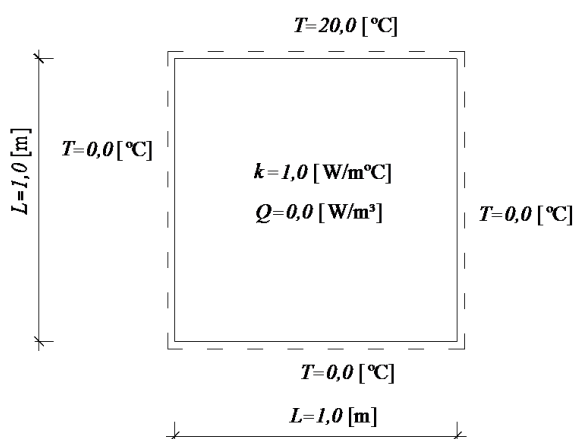


Figura 3.8: Descrição do teste 1

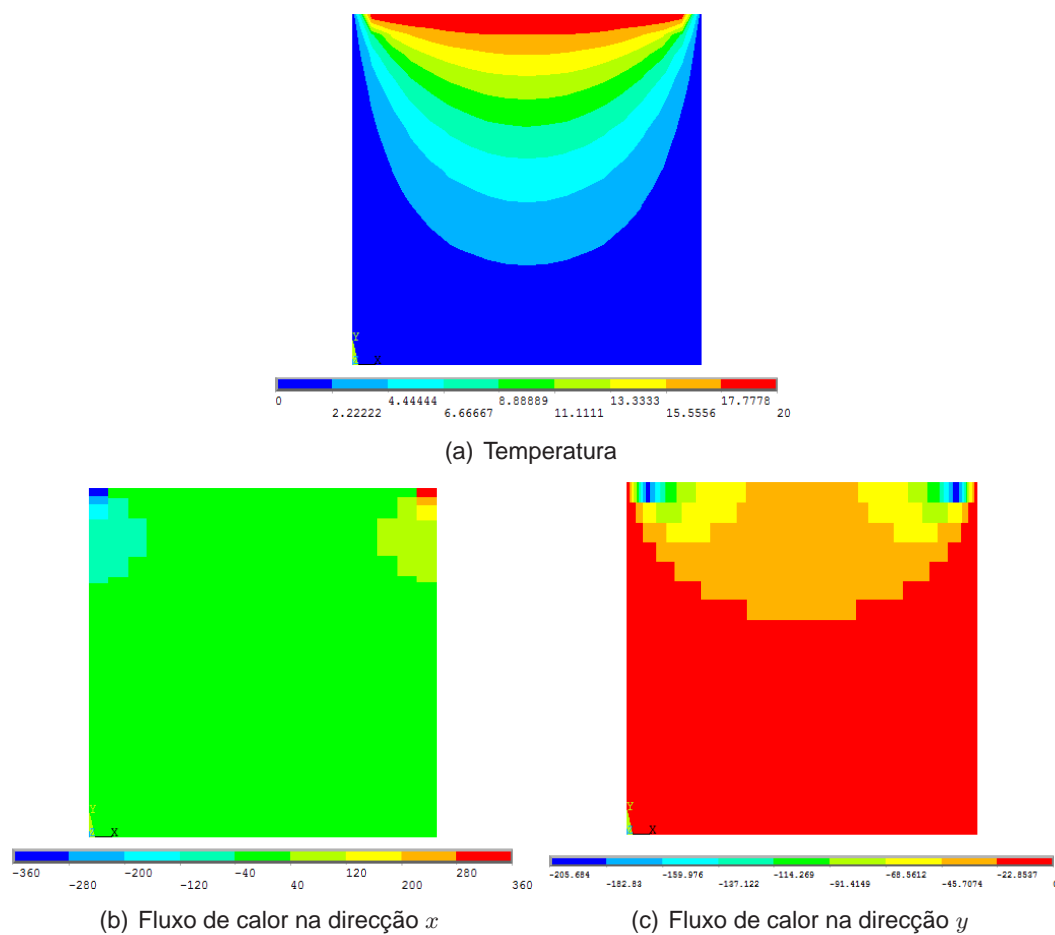


Figura 3.9: Teste 1.1

com 2500 elementos, num total de 2601 graus de liberdade. Os resultados obtidos encontram-se na figura 3.10.

Observa-se que as diferenças no campo das temperaturas com o aumento do



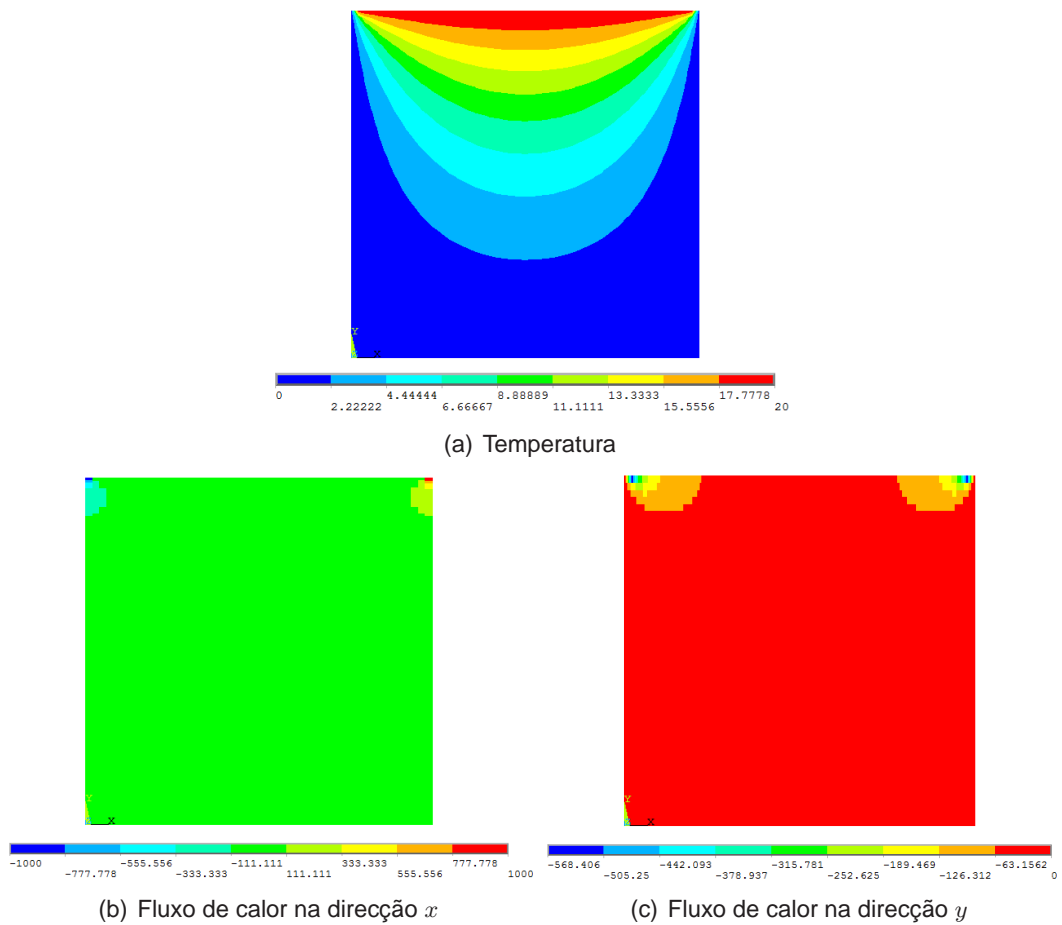


Figura 3.10: Teste 1.2

número de graus de liberdade são relativamente reduzidas. As mesmas são mais notáveis nas zonas onde os campos são descontínuos (i.e. nos cantos superiores), devido à dificuldade numérica associada à representação dessas discontinuidades. Por outro lado, a continuidade entre elementos adjacentes das temperaturas inerente aos elementos convencionais faz com que a solução do campo das temperaturas tenha uma qualidade superior à solução do campo dos fluxos de calor. Com efeito, nos fluxos de calor, o aumento do número de graus de liberdade altera a solução significativamente, em termos da distribuição dos fluxos e dos seus valores, em ambas as direcções. As soluções são descontínuas entre elementos adjacentes, ao contrário dos campos de temperaturas, e as discontinuidades proporcionam uma medida útil de erro para estes elementos. A solução (singular) do fluxo de calor nos cantos superiores do modelo é recuperada com precisão, que aumenta com o grau de refinamento  $h$ , ou seja, quanto menores são os elementos, maiores são os valores absolutos dos fluxos de calor. Se se usassem ainda mais graus de liberdade, os valores máximos absolutos dos fluxos aumentariam ainda mais.

No teste 2 aplicou-se uma temperatura igual em todas as fronteiras,  $T = 0.0$  [°C], e considerou-se a quantidade de calor gerada internamente de  $Q = 20.0$  [W/m<sup>3</sup>].

A representação do modelo encontra-se na figura 3.11.

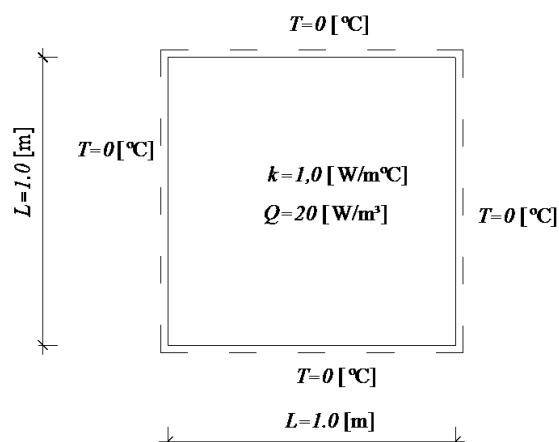


Figura 3.11: Descrição do teste 2

Tal como no teste 1, no teste 2 foram feitas duas análises para permitir uma comparação dos resultados com outros modelos.

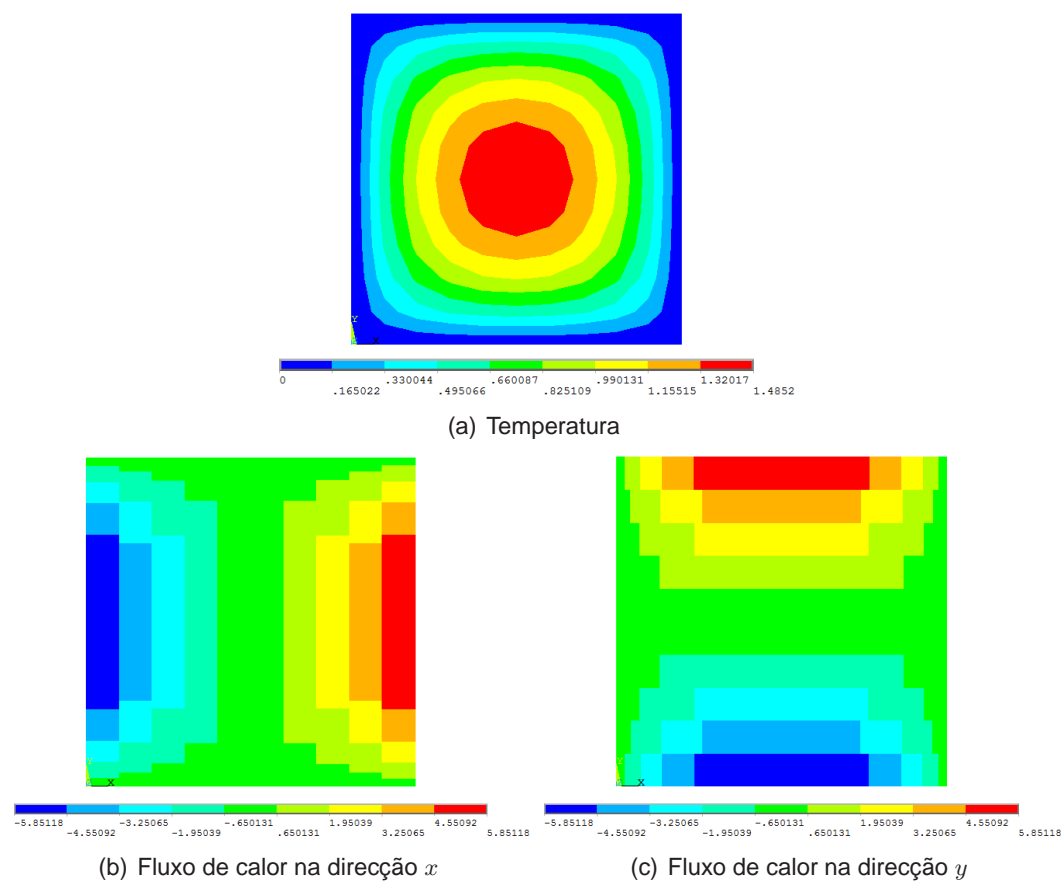


Figura 3.12: Teste 2.1

No teste 2.1 foi adoptada uma malha com 100 elementos, num total de 121 graus

de liberdade. Os resultados obtidos encontram-se na figura 3.12.

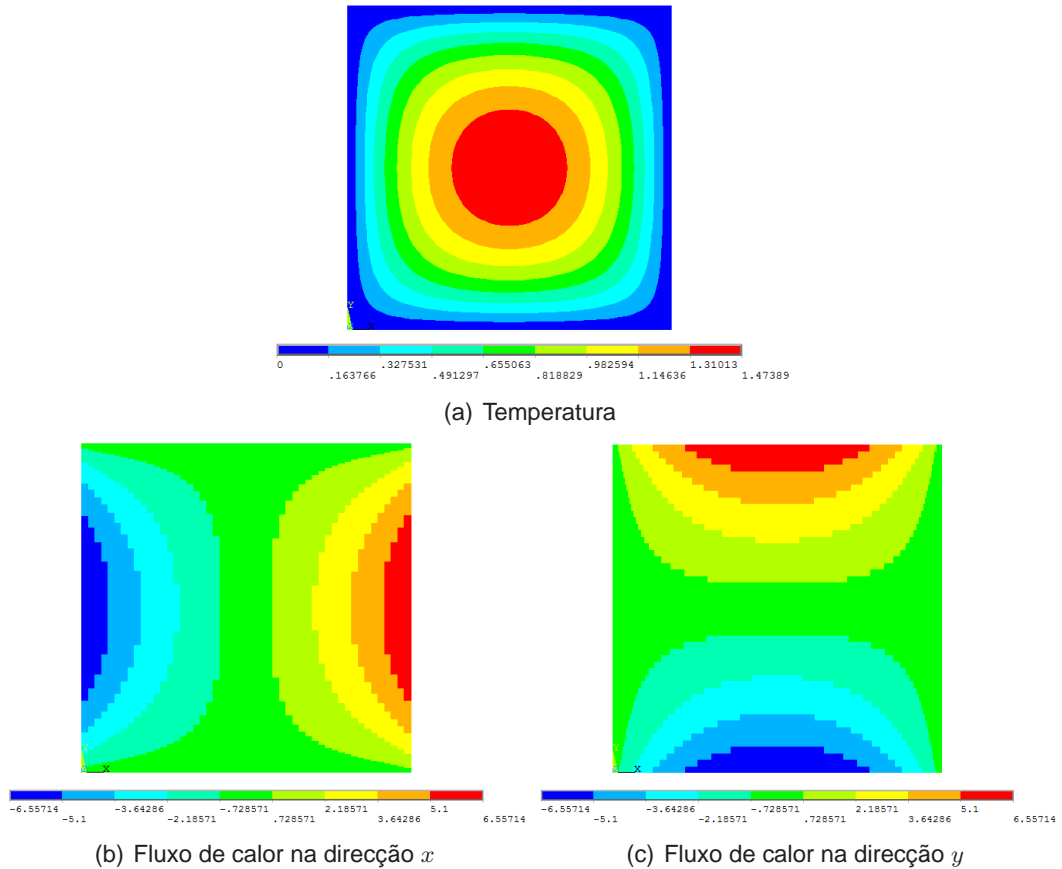


Figura 3.13: Teste 2.2

Adicionalmente foi considerada uma malha mais refinada. No teste 2.2 adoptou-se um modelo igual ao do teste 1.2, com um total de 2601 graus de liberdade. Os resultados obtidos encontram-se na figura 3.13.

O teste 2 é mais simples do ponto de vista numérico, uma vez que não existem singularidades ou descontinuidades no campo de temperaturas e fluxos de calor. Assim, no teste 2, não existem diferenças significativas nos valores máximos e mínimos dos campos das temperaturas com o aumento do número de graus de liberdade no corpo. Por outro lado, existem diferenças significativas entre os campos dos fluxos de calor obtidos com os dois níveis de refinamento  $h$ , no que diz respeito aos seus valores extremos ( $\approx 11\%$ ), e principalmente no que diz respeito ao seu nível de continuidade entre elementos adjacentes.

Pelos exemplos analisados é possível concluir que, no elemento convencional, existe uma discrepância importante entre a qualidade do campo aproximado directamente (o das temperaturas, neste caso) e o calculado por uma aproximação dependente (os campos dos fluxos de calor), sendo obviamente favorecido o primeiro. Esta situação é uma consequência directa da diferença na maneira como as equações de continuidade entre elementos adjacentes foram impostas. A continuidade das temperaturas foi imposta localmente, equação (3.3), e a continuidade dos fluxos de calor foi imposta em forma fraca, através da

equação (3.43).

## Capítulo 4

# Elementos finitos híbridos

### 4.1 Introdução

Neste capítulo aplica-se o método dos elementos finitos ao problema da condução térmica em regime estacionário, recorrendo a elementos finitos híbridos. Os elementos finitos convencionais, vistos no capítulo anterior, têm as funções de aproximação limitadas pela condição de conformidade das temperaturas nas fronteiras entre elementos adjacentes. Nos elementos híbridos, independentemente da base de aproximação adoptada no domínio, nas fronteiras entre elementos adjacentes e de Dirichlet os fluxos de calor são também aproximados e usados para impor a continuidade das temperaturas em forma fraca, ou em "média". Assim, a solução deixa de ser localmente compatível (ou equilibrada) e passam a haver equações adicionais na resolução do sistema. A forma integral das equações é deduzida e a sua implementação, em ambiente Matlab, é analisada. A convergência da solução é estudada, através de refinamentos  $p$  e  $h$  do modelo, para soluções analíticas conhecidas.

Os testes numéricos, já vistos com elementos finitos convencionais, são realizados com elementos finitos híbridos, para análise e comparação dos modelos.

### 4.2 Equação dos elementos

Para a formulação dos elementos finitos híbridos, parte-se da forma fraca do problema, definida na equação (2.60).

A aproximação da temperatura no domínio é dada por

$$\bar{T}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_D} U_i(x, y) X_i = \mathbf{U}(x, y) \mathbf{X} \quad (4.1)$$

onde  $N_D$  é o número de termos considerados na base de aproximação do domínio,  $\mathbf{U}$ , e  $\mathbf{X}$  é o vector dos coeficientes constantes correspondentes.

Ao contrário dos elementos convencionais, onde a escolha das bases de aproximação fazia com que o termo correspondente à fronteira de Dirichlet na forma fraca do problema desaparecece, nos elementos híbridos este termo não desaparece. Como os fluxos de calor nas fronteiras de Dirichlet não são

conhecidos há necessidade de aproximá-los. Deste modo as aproximações dos campos de temperatura no domínio e dos fluxos nas fronteiras de Dirichlet são assumidas de forma independente.

A aproximação do fluxo de calor nas fronteiras de Dirichlet é dada por

$$\mathbf{n} \bar{\mathbf{q}}(x, y) = \sum_{j=1}^{N_\Gamma} Z_j(s) Y_j = \mathbf{Z}(s) \mathbf{Y} \quad (4.2)$$

onde  $N_\Gamma$  é o número de termos considerados na base de aproximação na fronteira de Dirichlet,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$  é o vector dos coeficientes constantes correspondentes e  $s$  é o referencial da fronteira.

As únicas restrições que se aplicam às bases  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{Z}$  é que sejam completas e linearmente independentes. É de notar que podem ser acrescentadas soluções singulares à base quando se pretende modelar problemas com singularidades (e.g. concentração de fluxos de calor ou temperaturas localizadas). Com a adopção destas bases perde-se o significado físico dos pesos que se tinha nos elementos finitos convencionais, mas o facto de as aproximações no domínio serem independentes dos nós permite que o elemento tenha o número de nós e a forma da malha que se queiram escolher.

Substituindo as definições (4.1) e (4.2) na equação (2.60) e aplicando o método de Galerkin já visto na secção 3.3, segundo o qual  $\mathbf{W} \equiv \mathbf{U}$ , obtém-se

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{U})^T k \nabla \mathbf{U} d\Omega \mathbf{X} + \int_{\Gamma_u} \mathbf{U}^T \mathbf{Z} d\Gamma_u \mathbf{Y} + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}^T q_\Gamma d\Gamma_\sigma - \int_{\Omega} \mathbf{U}^T Q d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

A equação anterior pode ser escrita, para um elemento, na forma

$$\mathbf{KX} + \mathbf{BY} = \mathbf{b} - \mathbf{q}_\Gamma \quad (4.4)$$

com

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{U})^T k \nabla \mathbf{U} d\Omega \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{U}^T \mathbf{Z} d\Gamma_u \quad (4.6)$$

$$\mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{U}^T Q d\Omega \quad (4.7)$$

$$\mathbf{q}_\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}^T q_\Gamma d\Gamma_\sigma \quad (4.8)$$

A condição de fronteira de Dirichlet não foi imposta na determinação da forma fraca (4.3). Ao contrário do que acontece nos elementos finitos convencionais, nos elementos híbridos esta condição é também imposta em forma fraca, garantindo-se assim a continuidade das temperaturas na fronteira em média, usando como função de teste a base  $\mathbf{Z}$ .

A condição de fronteira (2.25) fica então

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T (\bar{T} - T_\Gamma) d\Gamma_u = 0 \quad (4.9)$$

Substituindo a definição (4.1) na equação (4.9) obtém-se

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T \mathbf{U} d\Gamma_u \mathbf{X} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u \quad (4.10)$$

ou

$$\mathbf{B}^T \mathbf{X} = \mathbf{t}_\Gamma \quad (4.11)$$

com

$$\mathbf{t}_\Gamma = \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u \quad (4.12)$$

Assuma-se agora que o domínio  $\Omega$  em análise, representado na figura 2.5, agora não considerando condições de fronteira de Robin, é discretizado em elementos finitos, como representado na figura 4.1, onde  $\Omega^e$  e  $\Gamma^e$  representam o domínio e fronteira, respectivamente, de um elemento finito típico,  $e$ .

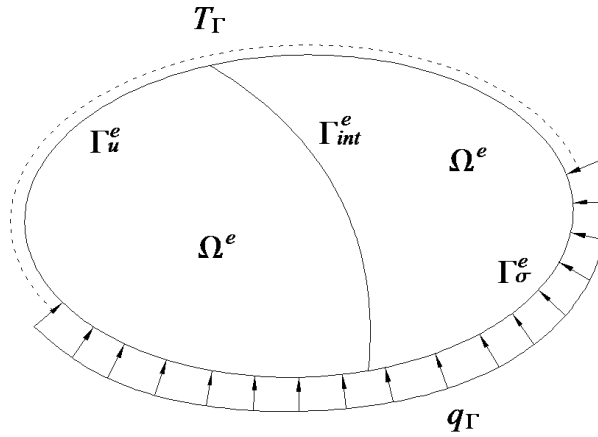


Figura 4.1: Domínio e fronteiras de Neumann, Dirichlet e interiores

No caso em que há mais do que um elemento, é necessário impor uma condição de continuidade de temperatura entre os elementos. Assim, do mesmo modo que se considerou a condição de fronteira de Dirichlet, considerando agora uma fronteira entre dois elementos adjacentes,  $\Gamma_{int}$ , um elemento 1 com temperatura  $T_1$  e um elemento 2 com temperatura  $T_2$ , a continuidade da temperatura na interface entre os dois elementos é dada por

$$\int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T (\bar{T}_1 - \bar{T}_2) d\Gamma_{int} = 0 \quad (4.13)$$

Substituindo a equação (4.13) em (4.1) obtém-se

$$\int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_1 d\Gamma_{int} \mathbf{X}_1 - \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_2 d\Gamma_{int} \mathbf{X}_2 = 0 \quad (4.14)$$

ou

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_1 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 = 0 \quad (4.15)$$

A partir das equações (4.4) e (4.11), ou (4.15) para fronteiras interiores, obtém-se o sistema resolutivo global do MEF híbridos na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} - \mathbf{q}_\Gamma \\ \mathbf{t}_\Gamma \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

A matriz de condutibilidade  $\mathbf{K}$ , do sistema simétrico e esparso (4.16), é uma matriz com diagonal por blocos, onde as submatrizes (blocos) na diagonal são as matrizes de condutibilidade de cada elemento, que nunca se sobrepõem. O vector das temperaturas  $\mathbf{X}$  só depende do respectivo elemento, não havendo somatório de matrizes, e o vector dos fluxos de calor  $\mathbf{Y}$  é, no máximo, partilhado por dois elementos, com uma fronteira em comum. As aproximações estão desligadas dos nós e são independentes, o que permite a utilização de bases diferentes em elementos diferentes. Como há uma aproximação adicional, do fluxo de calor normal nas fronteiras interiores e de Dirichlet, também aqui se pode ter refinamento localizado. As bases são construídas hierárquicamente, logo o refinamento  $p$  pode ser feito sem perda dos dados já determinados. Devido a estas características, o sistema é adequado para refinamento adaptativo e processamento paralelo.

Não há restrições ao processo de geração da malha de elementos finitos, a qual pode ser regular ou não regular.

De modo a demonstrar a aplicação da formulação, no apêndice B é resolvido o exemplo já visto com elementos convencionais no apêndice A, agora usando elementos finitos híbridos.

## 4.3 Implementação

Para o estudo dos elementos, a formulação desenvolvida foi implementada, de raiz, em ambiente Matlab.

### 4.3.1 Geometria e condições de fronteira

No presente trabalho foram implementados elementos de geometria simples. A implementação permite que o utilizador escolha condições de fronteira definidas por qualquer tipo de funções, sem restrições de grau ou ordem. A escolha dos níveis de refinamento  $p$  é também livre, em cada elemento e para cada fronteira. O calor gerado internamente,  $Q$ , no domínio, foi implementado exclusivamente com valor constante.

Os referenciais, correspondentes ao domínio e às fronteiras do elemento rectangular, encontram-se representados na figura 4.2.



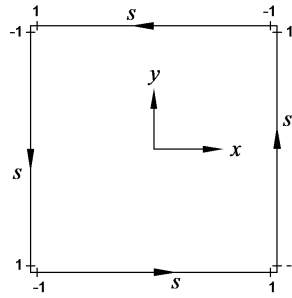


Figura 4.2: Referencial do domínio e fronteiras do elemento

A base no domínio é um conjunto de funções polinomiais completas, definidas no referencial  $xy$ , retiradas do triângulo de Pascal. Nas fronteiras de Dirichlet e interiores a base é também polinomial, com os polinômios definidos no referencial  $s$  de cada fronteira, na forma

$$Z(s) = s^n \quad (\forall) \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.17)$$

Na implementação, define-se a temperatura nas fronteiras de Dirichlet e o fluxo de calor normal nas fronteiras de Neumann. As direcções positivas dos fluxos de calor normais, em cada uma das fronteiras, encontram-se representadas na figura 4.3.

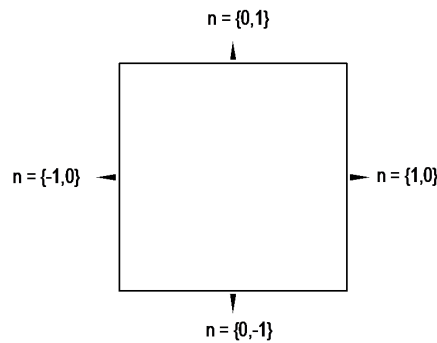


Figura 4.3: Direcções positivas dos fluxos de calor normais

#### 4.3.2 Construção e resolução do sistema

Nas fronteiras de Dirichlet e interiores aproxima-se o fluxo de calor que, segundo a lei de Fourier (2.4), é proporcional à derivada da temperatura, que é aproximada independentemente no domínio. Assim, e dado que em ambas as bases são adoptadas funções de aproximação polinomiais, apenas faz sentido adoptar para a base na fronteira funções com grau inferior ao grau das funções da base no domínio.

O número de condição do sistema resolvente tende a aumentar com o aumento do número de graus de liberdade. Uma condição necessária para garantir que o sistema não contém equações linearmente dependentes é garantir que o sistema é estática e cinematicamente indeterminado.

O número de indeterminação estática é definido pela diferença entre o número de incógnitas presentes nas equações estáticas e o número das respectivas equações. Da mesma forma, o número de indeterminação cinemática é definido pela diferença entre o número de incógnitas presentes nas equações cinemáticas e o número dessas equações. Assim, pode-se verificar que o sistema é sempre iso ou hiperestático. Notando por  $Dim(\mathbf{X})$  e  $Dim(\mathbf{Y})$  os números de incógnitas cinemáticas e estáticas (que correspondem às dimensões totais dos vectores  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  do sistema (4.16)), o número de indeterminação estática é dado por

$$\alpha = [Dim(\mathbf{X}) + Dim(\mathbf{Y})] - Dim(\mathbf{X}) = Dim(\mathbf{Y}) \geq 0$$

O sistema apenas é isostático se o meio for discretizado utilizando apenas um elemento e não houver nenhuma fronteira de Dirichlet.

Analisando agora o número de indeterminação cinemática, que é dado por

$$\beta = Dim(\mathbf{X}) - Dim(\mathbf{Y})$$

resulta que o sistema apenas é cinematicamente indeterminado se  $Dim(\mathbf{X}) > Dim(\mathbf{Y})$ , condição que terá que ser sempre satisfeita pela escolha dos graus das funções de aproximação no domínio e nas fronteiras dos elementos.

Vai agora ser verificado se, ao serem adoptadas na base das fronteiras funções com grau inferior ao grau das funções adoptadas na base do domínio, se garante que o sistema é cinematicamente indeterminado.

Uma base no domínio que inclua funções de grau  $n_D$ , que corresponde a  $n_D + 1$  linhas completas do triângulo de Pascal, tem um total de  $N_D$  funções, com  $N_D$  dado por

$$N_D = \sum_{i=1}^{n_D+1} i \quad (4.18)$$

Uma base na fronteira de grau  $n_\Gamma$  inclui  $N_\Gamma$  funções, com  $N_\Gamma$  dado por

$$N_\Gamma = n_\Gamma + 1 \quad (4.19)$$

Por simplicidade e não limitando o âmbito da demonstração, assume-se que o sistema (4.16) é escrito para uma malha composta por um único elemento e considera-se que é usado o mesmo grau de refinamento  $p$  nas bases de todas as fronteiras de Dirichlet.

Para o problema ser cinematicamente indeterminado é necessário que

$$N_D > n_s N_\Gamma \quad (4.20)$$

onde  $n_s$  é o número de lados do elemento que formam a fronteira de Dirichlet. Vai ser analisado o caso mais condicionante, em que os quatro lados do elemento formam a fronteira de Dirichlet,  $n_s = 4$ .

Se o grau das funções no domínio for um ( $n_D = 1$ ), a base de aproximação no domínio contém três funções ( $N_D = 3$ ), e a condição de indeterminação cinemática não pode ser satisfeita mesmo que a base nas fronteiras seja

construída utilizando uma única função ( $N_\Gamma = 1$ ), porque  $3 < 4N_\Gamma$ .

Se se considerar uma base no domínio com funções do segundo grau ( $n_D = 2$ ), então a base de aproximação no domínio tem seis funções ( $N_D = 6$ ), e o número máximo de funções em cada fronteira para satisfazer a condição de indeterminação cinemática é um ( $N_\Gamma = 1$ ), ou seja, nas fronteiras, a base pode conter, no máximo, uma função, o que corresponde à base ser uma constante ( $n_\Gamma = 0$ ).

Este exemplo e outros obtidos seguindo o mesmo raciocínio são apresentados na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Verificação da indeterminação cinemática do sistema

$n_D$	$N_D$	$n_\Gamma$	$N_\Gamma$
2	6	0	1
3	10	1	2
4	15	2	3
5	21	4	5
6	28	5	6

Analisando a tabela anterior conclui-se que simplesmente considerar que as funções na fronteira devem ter grau inferior às do domínio nem sempre é suficiente para garantir que o sistema é cinematicamente indeterminado. Para este exemplo específico, a condição só é verificada quando se adoptam no domínio funções de grau cinco ( $n_D = 5$ ), ou superior.

Quando se considera uma malha com mais do que um elemento, a condição passa a ter em conta o número de funções da totalidade do domínio e da totalidade das fronteiras. Para estes casos, a condição fica menos restritiva, já que passam a haver fronteiras partilhadas por elementos.

Dada a natureza polinomial das funções adoptadas nas bases de aproximação e a forma rectangular dos elementos finitos, as integrações são feitas analiticamente, no domínio e na fronteira.

#### 4.3.3 Construção da solução

A solução do sistema (4.16) fornece uma estimativa única para o campo de temperaturas, tanto no domínio como nas fronteiras. Estes campos são calculados utilizando a definição (4.1), como

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(e)}(x, y) &= \mathbf{U}^{(e)}(x, y) \mathbf{X}^{(e)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \dots \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} X_1^{(e)} \\ X_2^{(e)} \\ X_3^{(e)} \\ X_4^{(e)} \\ X_5^{(e)} \\ X_6^{(e)} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \\ &= X_1^{(e)} + X_2^{(e)}x + X_3^{(e)}y + X_4^{(e)}x^2 + X_5^{(e)}xy + X_6^{(e)}y^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

No domínio há uma estimativa única do campo dos fluxos de calor, calculada da aproximação do campo de temperaturas, pela lei de Fourier (2.4),

$$\bar{\mathbf{q}}^{(e)}(x, y) = -k \left[ \nabla \mathbf{U}^{(e)}(x, y) \right] \mathbf{X}^{(e)} = -k \left[ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & \dots \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} X_1^{(e)} \\ X_2^{(e)} \\ X_3^{(e)} \\ X_4^{(e)} \\ X_5^{(e)} \\ X_6^{(e)} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \quad (4.22)$$

Na direcção  $x$  o fluxo de calor no domínio é dado por

$$\bar{q}_x^{(e)}(x, y) = -k \left( X_2^{(e)} + 2X_4^{(e)}x + X_5^{(e)}y + \dots \right) \quad (4.23)$$

e na direcção  $y$  por

$$\bar{q}_y^{(e)}(x, y) = -k \left( X_3^{(e)} + X_5^{(e)}x + 2X_6^{(e)}y + \dots \right) \quad (4.24)$$

Pelo contrário, nas fronteiras interiores e de Dirichlet, obtém-se uma estimativa múltipla do campo dos fluxos de calor normais, os mesmos podendo ser calculados a partir do vector  $\mathbf{Y}^{(\Gamma)}$  de cada fronteira  $\Gamma$ , na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(\Gamma)} \bar{\mathbf{q}}^{(\Gamma)}(x, y) &= \mathbf{Z}^{(\Gamma)}(s) \mathbf{Y}^{(\Gamma)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & s & s^2 & s^3 & \dots \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} Y_1^{(\Gamma)} \\ Y_2^{(\Gamma)} \\ Y_3^{(\Gamma)} \\ Y_4^{(\Gamma)} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \\ &= Y_1^{(\Gamma)} + Y_2^{(\Gamma)}s + Y_3^{(\Gamma)}s^2 + Y_4^{(\Gamma)}s^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

ou a partir do vector  $\mathbf{X}^{(e)}$ , na forma

$$\mathbf{n}^{(\Gamma)} \bar{q}^{(\Gamma)}(x, y) = - \left\{ \begin{matrix} n_x & n_y \end{matrix} \right\} k \left[ \nabla U^{(e)}(x, y) \right] \mathbf{X}^{(e)} \quad (4.26)$$

Quando se trata de fronteiras interiores, os fluxos de calor podem ainda ser calculados pela relação (4.26), a partir dos dois elementos que partilham a fronteira. As aproximações dos fluxos nas fronteiras através das diferentes soluções obtidas podem ser comparadas para estimar convergência. Note-se que a condição de continuidade dos fluxos de calor entre elementos adjacentes nunca foi imposta e apenas se verifica se houver convergência.

## 4.4 Convergência

Para avaliar a convergência do modelo, é efectuado um conjunto de simulações numéricas, para as quais se sabe a solução analítica. Em cada simulação numérica variam-se os refinamentos  $p$  e  $h$ , comparando-se os resultados com a solução exacta.

Os testes são realizados aplicando um conjunto de condições de fronteira, de Neumann e Dirichlet, no perímetro do corpo. Os valores dos fluxos de calor normais e temperaturas definidos nas fronteiras representam as projecções na fronteira de um campo no domínio que obedece à equação de Poisson, e que desta forma representa a solução analítica do problema.

### 4.4.1 Solução analítica

As soluções analíticas analisadas, que verificam a equação de Poisson (2.16), são da forma

$$T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{a \bar{x}} \sin(a \bar{y}) \quad (4.27)$$

Na figura 4.4 são apresentadas as condições de fronteira aplicadas nos modelos. Para aumentar o grau de generalidade das conclusões, optou-se pela inclusão tanto de fronteiras de Neumann, como de Dirichlet. Os eixos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são os eixos globais de referência, definidos na mesma figura.

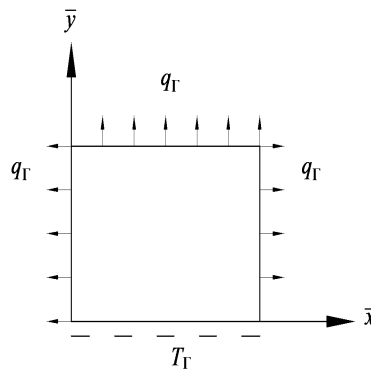


Figura 4.4: Condições de fronteira e referencial das soluções analíticas

Os fluxos de calor, pela Lei de Fourier (2.4), são dados, na direcção  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  respectivamente, por

$$q_x(\bar{x}, \bar{y}) = -k a e^{a\bar{x}} \sin(a\bar{y}) \quad (4.28)$$

$$q_y(\bar{x}, \bar{y}) = -k a e^{a\bar{x}} \cos(a\bar{y}) \quad (4.29)$$

Verifica-se que, para qualquer valor de  $a$ , a solução não está contida em nenhuma das bases de aproximação (polinomiais) adoptadas.

Os valores de  $a$  considerados foram  $a = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ , podendo assim ser também avaliada a convergência dos elementos finitos híbridos com o aumento da oscilação da solução, e consequente dificuldade numérica.

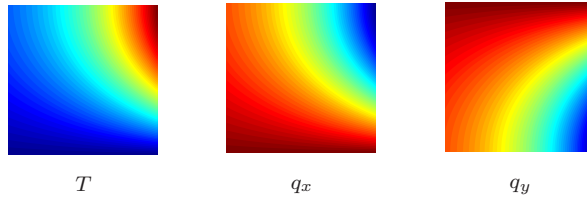


Figura 4.5: Solução analítica  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$

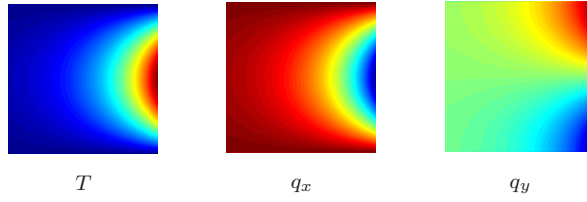


Figura 4.6: Solução analítica  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi\bar{x}} \sin(\pi\bar{y})$

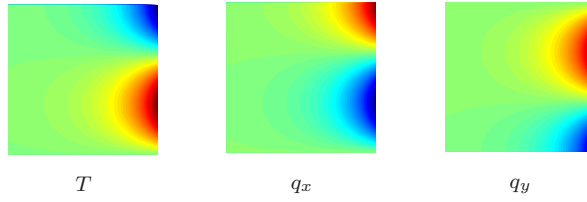


Figura 4.7: Solução analítica  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\bar{y}\right)$

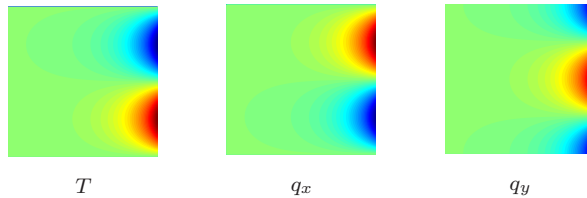


Figura 4.8: Solução analítica  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi\bar{x}} \sin(2\pi\bar{y})$

A título ilustrativo, nas figuras 4.5 a 4.8 estão representadas as soluções analíticas para cada valor de  $a$  considerado nos testes realizados.

#### 4.4.2 Definição do modelo

Em todos os testes adoptou-se um domínio quadrado, de lado unitário. A condutibilidade térmica do material foi também considerada com valor unitário,  $k = 1$ . A quantidade de calor gerada no interior do elemento foi considerada nula,  $Q = 0$ .

A convergência para refinamento  $h$  foi estudada considerando malhas com 1, 4, 9 e 16 elementos quadrados iguais, como se vê na figura 4.9.

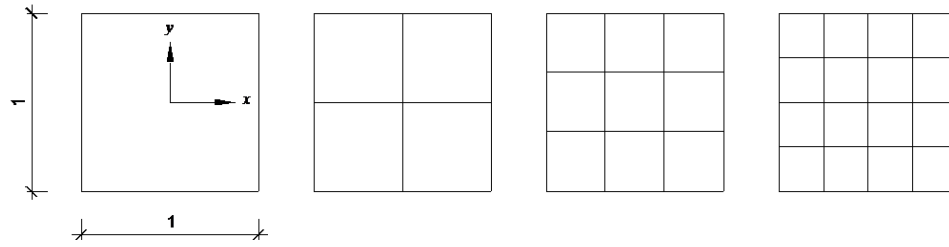


Figura 4.9: Malhas testadas (refinamento  $h$ )

A influência do refinamento  $p$  foi avaliada aumentando o número de funções nas bases de aproximação no domínio, garantindo-se sempre que estas se mantêm completas e linearmente independentes. Na base do domínio consideraram-se funções polinomiais de grau  $n_D = \{2, 3, 4\}$ , e na base das fronteiras correspondentes, os graus das funções considerados foram  $n_\Gamma = \{1, 2, 3\}$ . Em cada uma das simulações foram utilizadas bases de refinamento constante, tanto no domínio, como nas fronteiras interiores e de Dirichlet, em todos os elementos. Em todos os modelos o sistema é estática e cinematicamente indeterminado.

O erro relativo da aproximação por elementos finitos,  $E$ , é definido pela diferença relativa entre as temperaturas correspondentes à solução exacta,  $T$ , e à solução obtida pelo método dos elementos finitos,  $\bar{T}$ , e é calculado através da expressão

$$E = \sum_e \int_{\Omega_e} \left| \frac{\bar{T}^{(e)} - T^{(e)}}{T^{(e)}} \right| d\Omega \quad (4.30)$$

para todos os elementos,  $e$ , da malha adoptada no modelo.

O erro,  $E$ , é calculado para cada refinamento,  $h$  e  $p$ , efectuado e a cada erro corresponde uma dimensão total do sistema,  $N$ . A taxa de convergência de um dado refinamento,  $k$ , é dada pelo declive da interpolação linear dos valores correspondentes dos erros relativos e graus de liberdade, como é mostrado na figura 4.10.

Pode-se escrever uma expressão geral que relaciona a taxa de convergência com o erro relativo e o número de graus de liberdade, como

$$E = N^{-k} \quad (4.31)$$

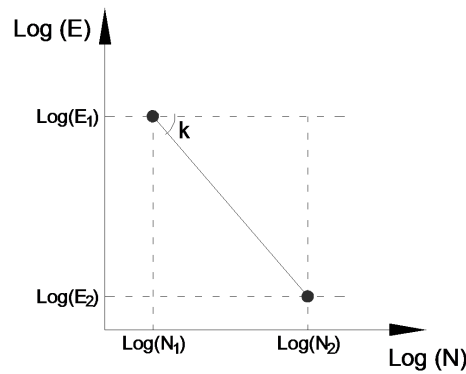


Figura 4.10: Taxa de convergência,  $k$

A expressão (4.31) permite avaliar a ordem de diminuição do erro quando o número de graus de liberdade é aumentado  $h$  vezes através de uma expressão semelhante à que foi usada nos elementos convencionais

$$O = h^k$$

permitindo, assim, uma comparação directa entre os dois tipos de elementos.

#### 4.4.3 Resultados

Os resultados da distribuição de temperatura e fluxos de calor obtidos em cada um dos refinamentos considerados encontram-se nas figuras 4.11 a 4.22. Em cada um dos resultados é indicado o número de elementos considerados na malha e o grau dos polinómios usados na base de aproximação na fronteira,  $e$  e  $n_D$ , respectivamente.

As figuras permitem avaliar visualmente a capacidade dos modelos recuperarem as temperaturas e fluxos de calor impostos. Comparando com as soluções exactas (figuras 4.5 a 4.8), é possível ver que à medida que a dificuldade numérica (parâmetro  $a$ ) aumenta, é necessário aumentar os refinamentos (tanto  $p$  como  $h$ ) para se obter soluções mais próximas das soluções analíticas. Por exemplo, para  $a = \pi/2$  consegue-se uma boa aproximação da temperatura considerando apenas um elemento e funções polinomiais de segundo grau no domínio (figura 4.11(a)), enquanto que para  $a = 2\pi$ , para se obter uma solução mais próxima da solução exacta, é necessário adoptar mais elementos (pelo menos quatro) e funções de aproximação de grau superior no domínio (pelo menos polinómios de terceiro grau) (figuras 4.20(g) e 4.20(j), por exemplo). A dificuldade da modelação com o aumento da oscilação da solução é ainda maior quando se está a analisar o campo dos fluxos de calor, dado que essas soluções são obtidas da derivada do campo das temperaturas. É de notar que quando se usam nas bases funções com graus mais baixos, é perceptível a falta de continuidade da solução entre os elementos. Esta descontinuidade desaparece com os refinamentos, mais evidentemente com o refinamento  $p$ .

Os gráficos de convergência dos modelos permitem uma análise quantitativa dos



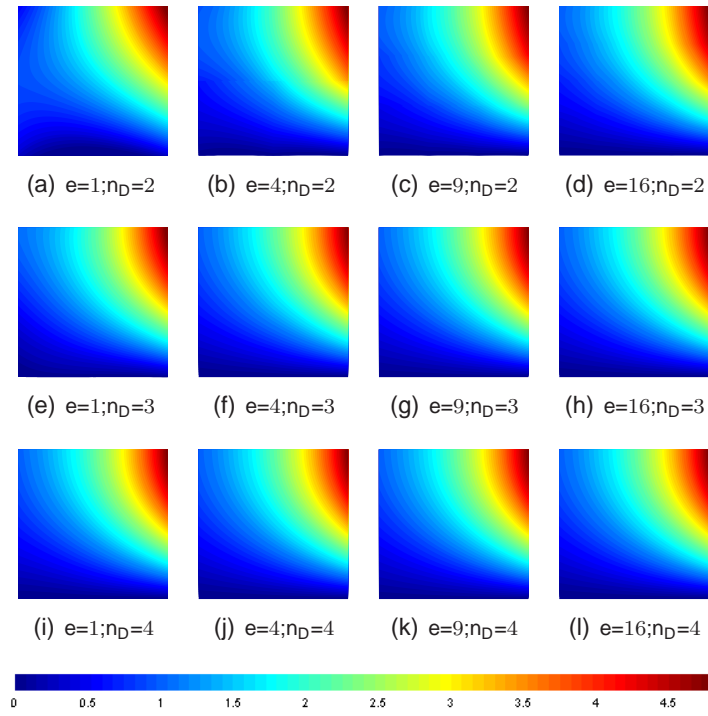


Figura 4.11: Temperatura para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$

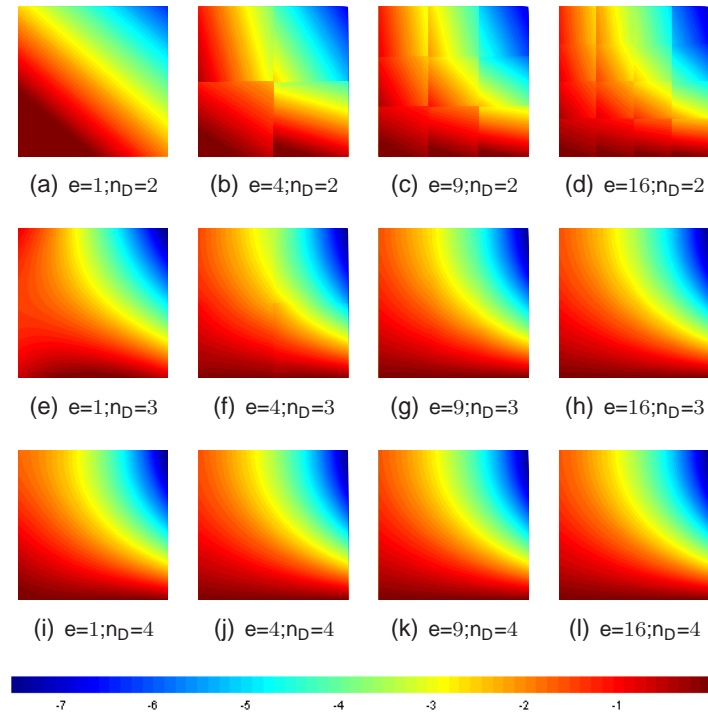


Figura 4.12: Fluxo de calor na direcção  $x$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$

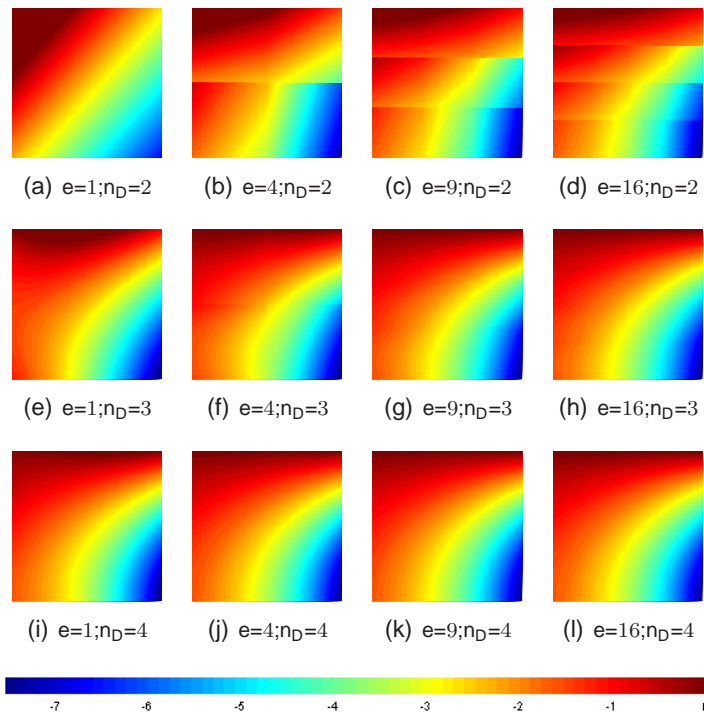


Figura 4.13: Fluxo de calor na direcção  $y$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$

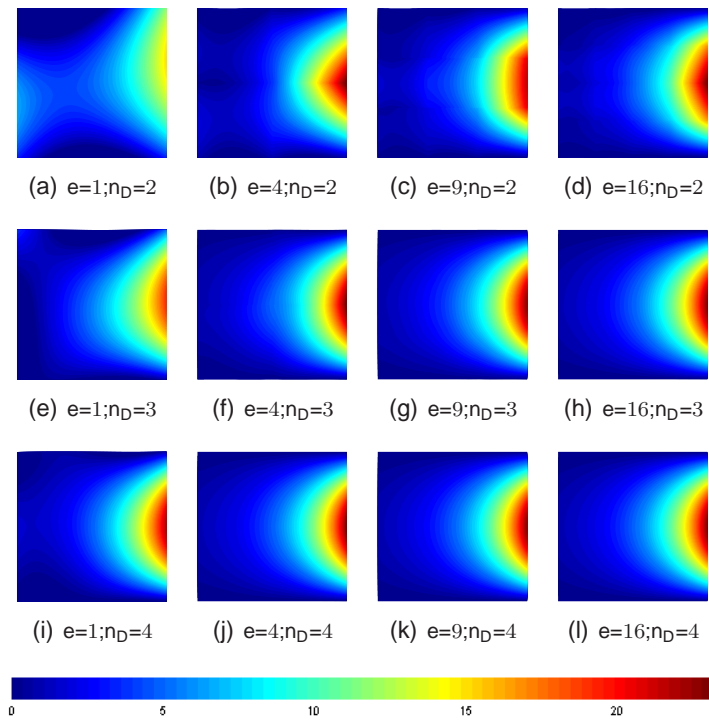


Figura 4.14: Temperatura para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi\bar{x}} \sin(\pi\bar{y})$

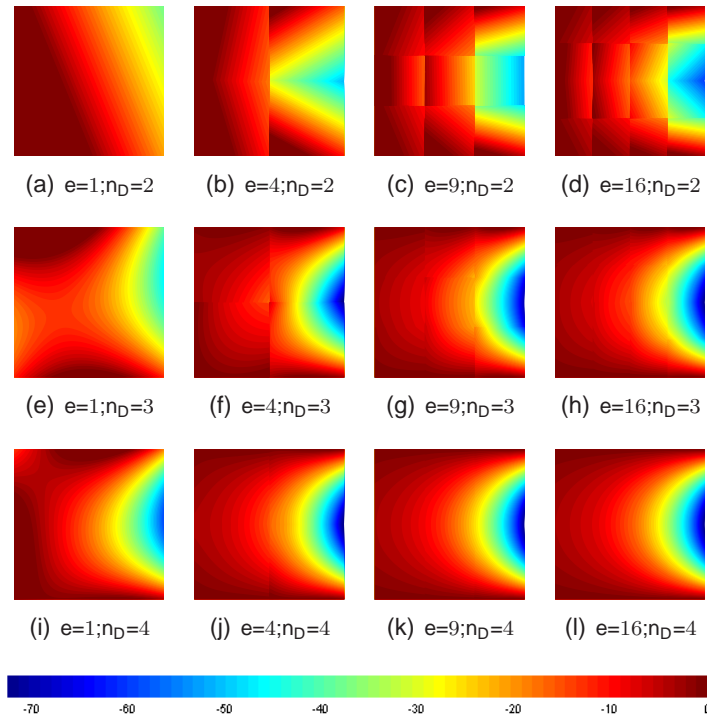


Figura 4.15: Fluxo de calor na direcção  $x$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi \bar{x}} \sin(\pi \bar{y})$

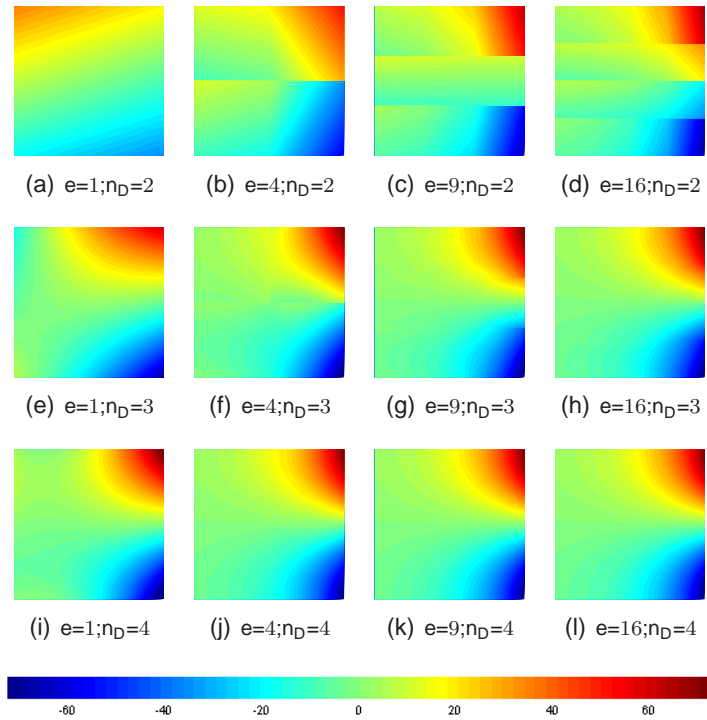


Figura 4.16: Fluxo de calor na direcção  $y$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi \bar{x}} \sin(\pi \bar{y})$

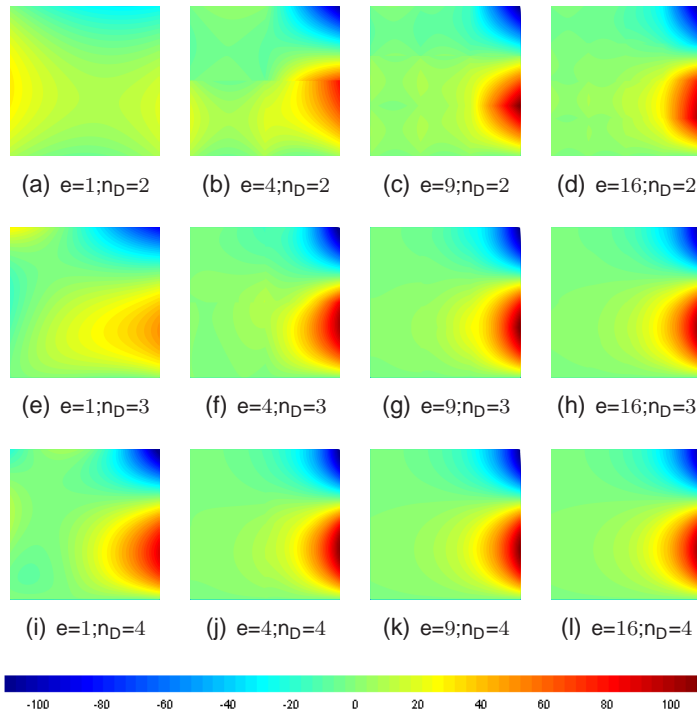


Figura 4.17: Temperatura para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\bar{y}\right)$

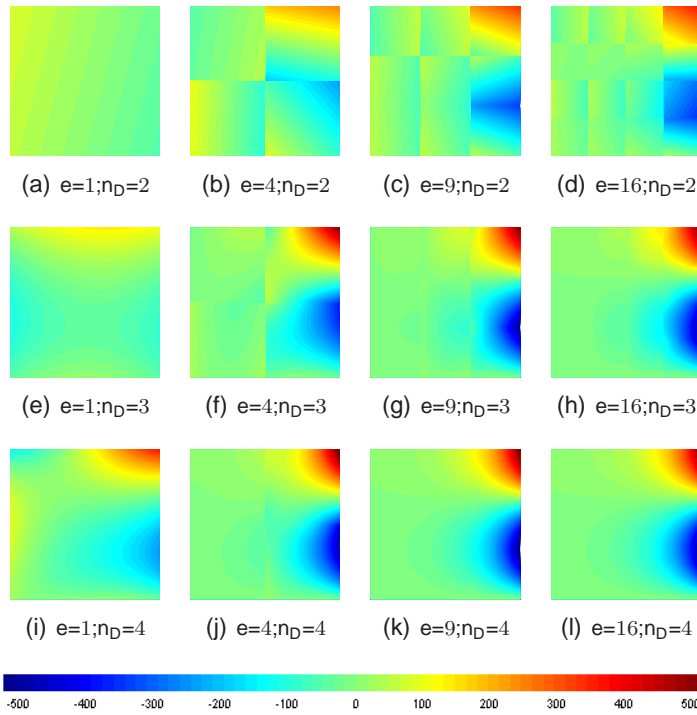


Figura 4.18: Fluxo de calor na direcção  $x$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\bar{y}\right)$

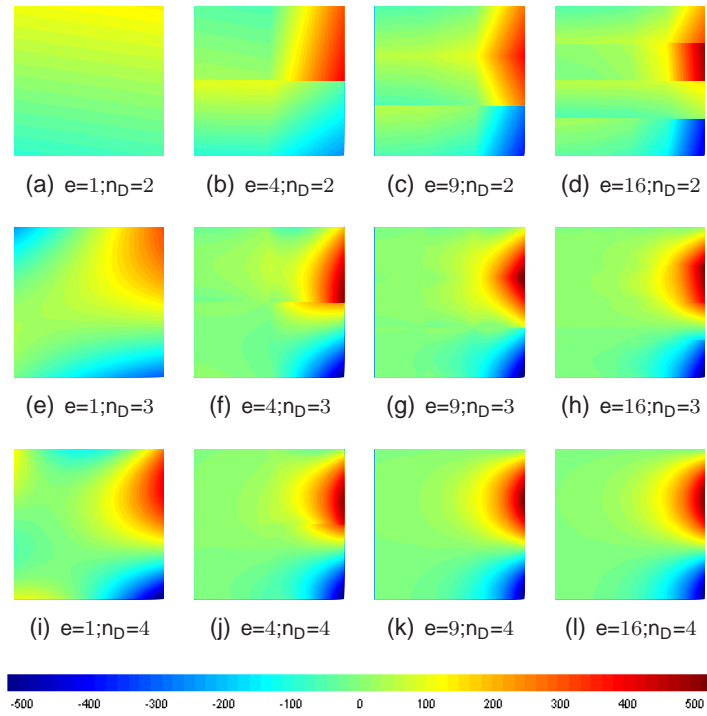


Figura 4.19: Fluxo de calor na direcção  $y$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\bar{y}\right)$

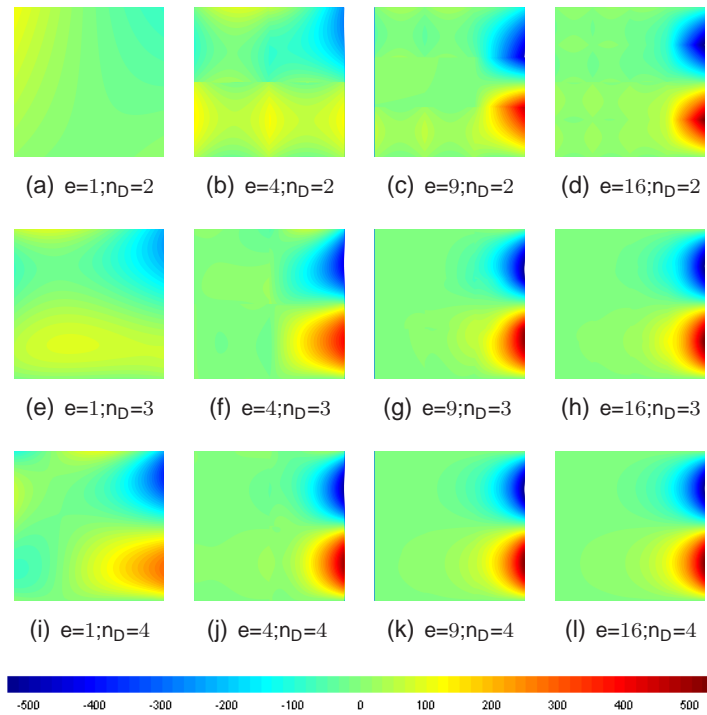


Figura 4.20: Temperatura para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi\bar{x}} \sin(2\pi\bar{y})$

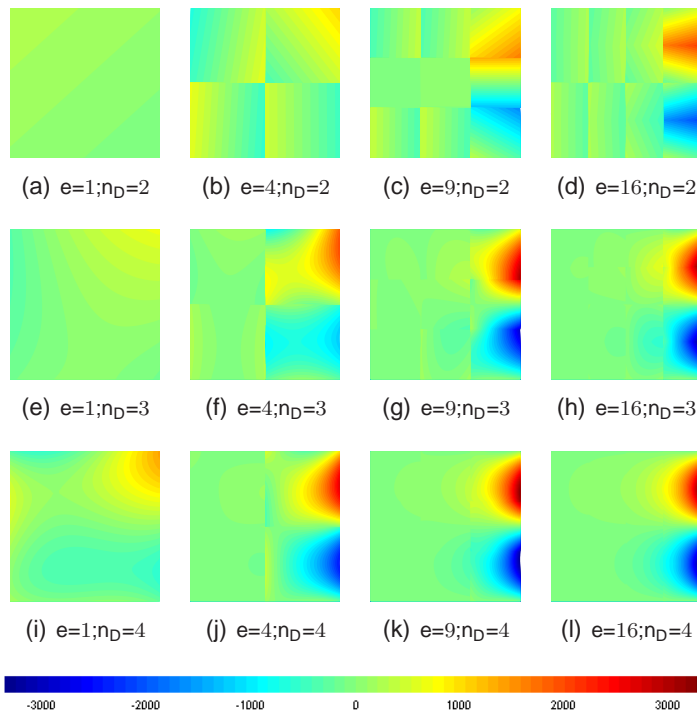


Figura 4.21: Fluxo de calor na direcção  $x$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi \bar{x}} \sin(2\pi \bar{y})$

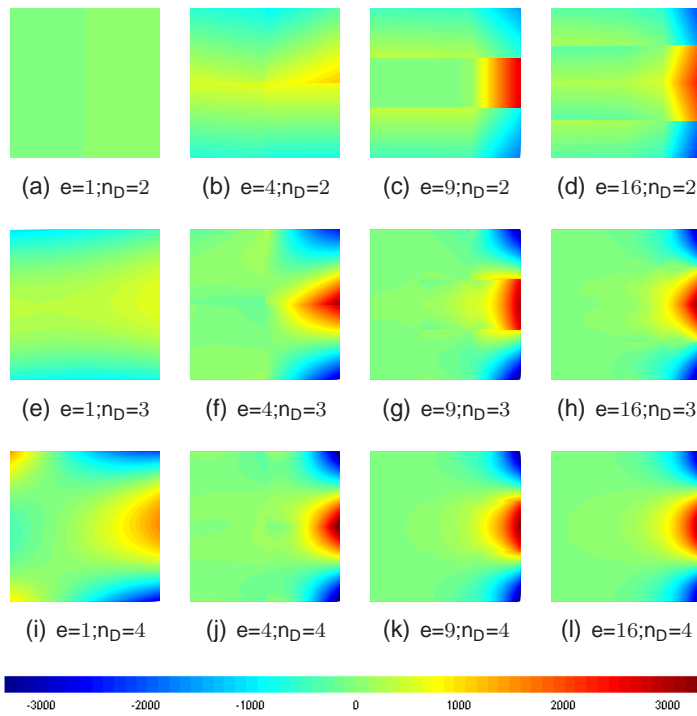


Figura 4.22: Fluxo de calor na direcção  $y$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi \bar{x}} \sin(2\pi \bar{y})$

resultados, a partir dos erros das aproximações.

A convergência das soluções obtidas em cada um dos modelos, para refinamento  $p$  e  $h$ , encontra-se na figura 4.23. Os valores nas abscissas representam o logaritmo do número total de graus de liberdade do sistema  $N$ , e nas ordenadas encontra-se o logaritmo do valor dos erros relativos  $E$ . Cada um dos gráficos contém quatro linhas com marcadores, correspondentes ao refinamento  $p$  com as malhas de um, quatro, nove e dezasseis elementos, e três linhas sem marcadores, que representam a convergência  $h$  obtida usando o mesmo grau de refinamento no domínio dos elementos.

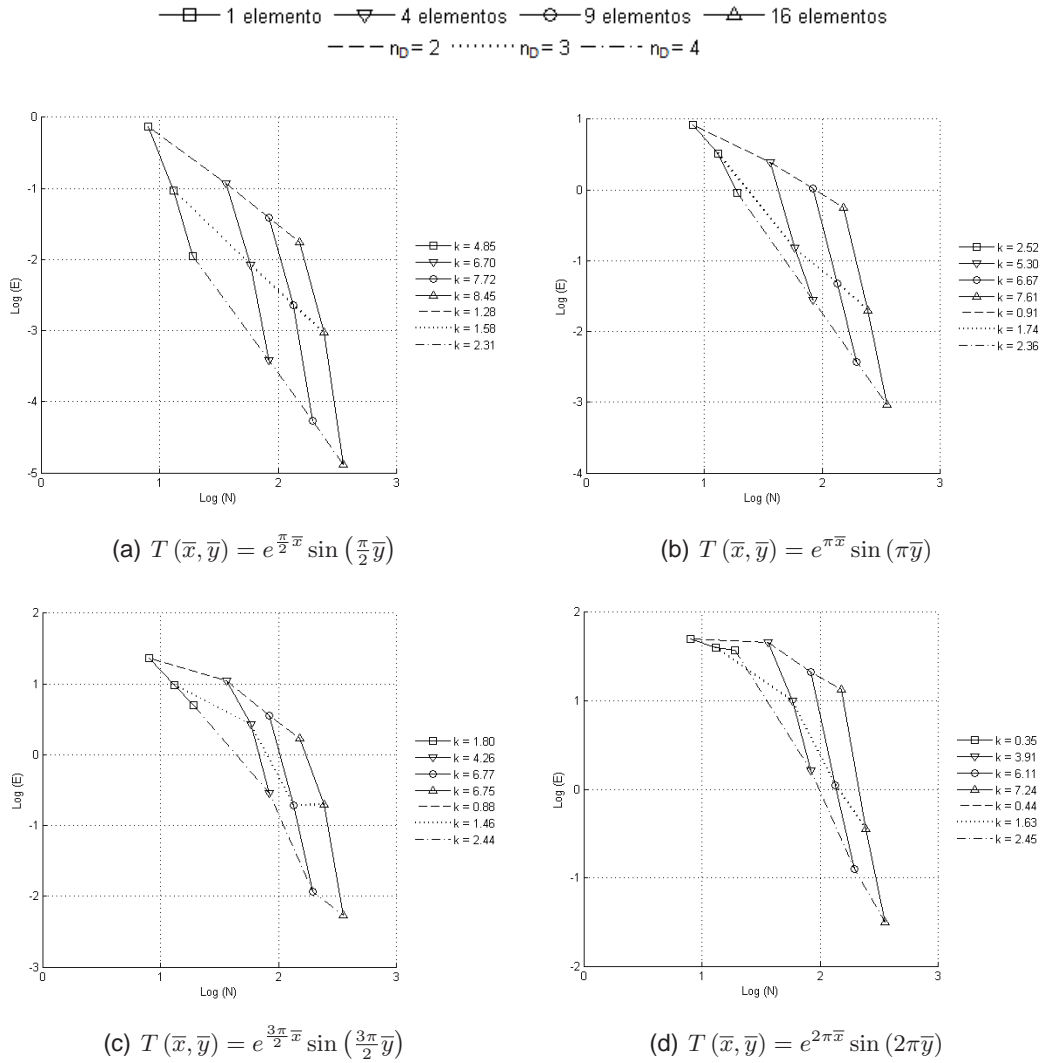


Figura 4.23: Convergência da solução para refinamentos  $p$  e  $h$

Os resultados mostram que os erros são maiores quanto maior é a oscilação da solução (parâmetro  $a$ ), e a consequente dificuldade numérica. Em geral, a taxa de convergência para o refinamento  $h$  é consideravelmente inferior à do refinamento  $p$ . Observa-se que ambos os refinamentos têm influência um no outro, melhorando as taxas de convergência, ou seja, as taxas de convergência obtidas

para o refinamento  $p$  aumentam com o aumento do refinamento  $h$  e vice-versa. No caso dos elementos convencionais, a taxa de convergência para refinamento  $h$  é conhecida e tem o valor de 3, 4 e 5 para elementos com funções de aproximação no domínio de grau,  $n_D$ , 2, 3 e 4, respectivamente. Analisando na figura 4.23 as taxas de convergência correspondentes, nas linhas a tracejado, conclui-se que se conseguem resultados melhores para refinamento  $h$  com elementos convencionais, sempre. No entanto, com refinamento  $p$ , nos elementos híbridos conseguem-se taxas de convergência superiores. Também se pode ver que à medida que aumenta a oscilação da solução, é necessário considerar um valor mínimo de refinamento  $h$  para que a convergência seja conseguida. É de notar que as taxas de convergência analisadas no presente capítulo são unicamente baseadas no campo das temperaturas. Em alternativa, a medida do erro podia ser definida com base nas soluções dos campos dos fluxos de calor ou na energia térmica do sistema (onde se consideram ambos os campos, de temperatura e fluxos de calor). O campo das temperaturas, como foi visto no capítulo anterior, é o campo melhor aproximado nos elementos convencionais e, claramente, para refinamento  $h$ , a convergência com elementos convencionais é superior à conseguida com elementos híbridos. Também foi visto que as aproximações dos campos dos fluxos com elementos convencionais têm discrepâncias significativas dos resultados exactos. Logo, ao considerar a aproximação do campo dos fluxos ou da energia térmica, os erros obtidos com elementos convencionais aumentam consideravelmente. Assim, as taxas de convergência para elementos convencionais aqui consideradas são válidas mas não são representativas do desempenho dos elementos na recuperação de quaisquer outros campos sem ser o da temperatura.

## 4.5 Exemplos numéricos

Para avaliar o desempenho dos elementos finitos híbridos, foram efectuados os testes definidos na secção 3.5, já feitos com elementos finitos convencionais, nomeadamente o teste 1 (figura 3.8) e teste 2 (figura 3.11). É de notar que em ambos os testes apenas existem fronteiras de Dirichlet e interiores, sendo portanto usadas aproximações em todas as fronteiras.

No teste 1 o domínio foi dividido em 16 elementos, a indeterminação estática é de 117, a indeterminação cinemática é de 187 e o número total de graus de liberdade é 421. O grau das funções polinomiais adoptadas no domínio e fronteiras e os resultados do teste encontram-se na figura 4.24.

Neste teste, pode-se observar a capacidade do modelo recuperar a continuidade entre os elementos e as condições de fronteira impostas, para uma situação com um campo de temperaturas de difícil representação devido às descontinuidades presentes nos cantos superiores.

A descontinuidade faz com que haja necessidade de aumentar o grau das funções das bases do domínio nos elementos correspondentes (cantos superiores), para se conseguir uma melhor aproximação dos resultados. Havendo mais funções na base no domínio, é possível acrescentar mais funções nas bases das fronteiras o que, em geral, leva a melhores aproximações. No entanto, verifica-se que



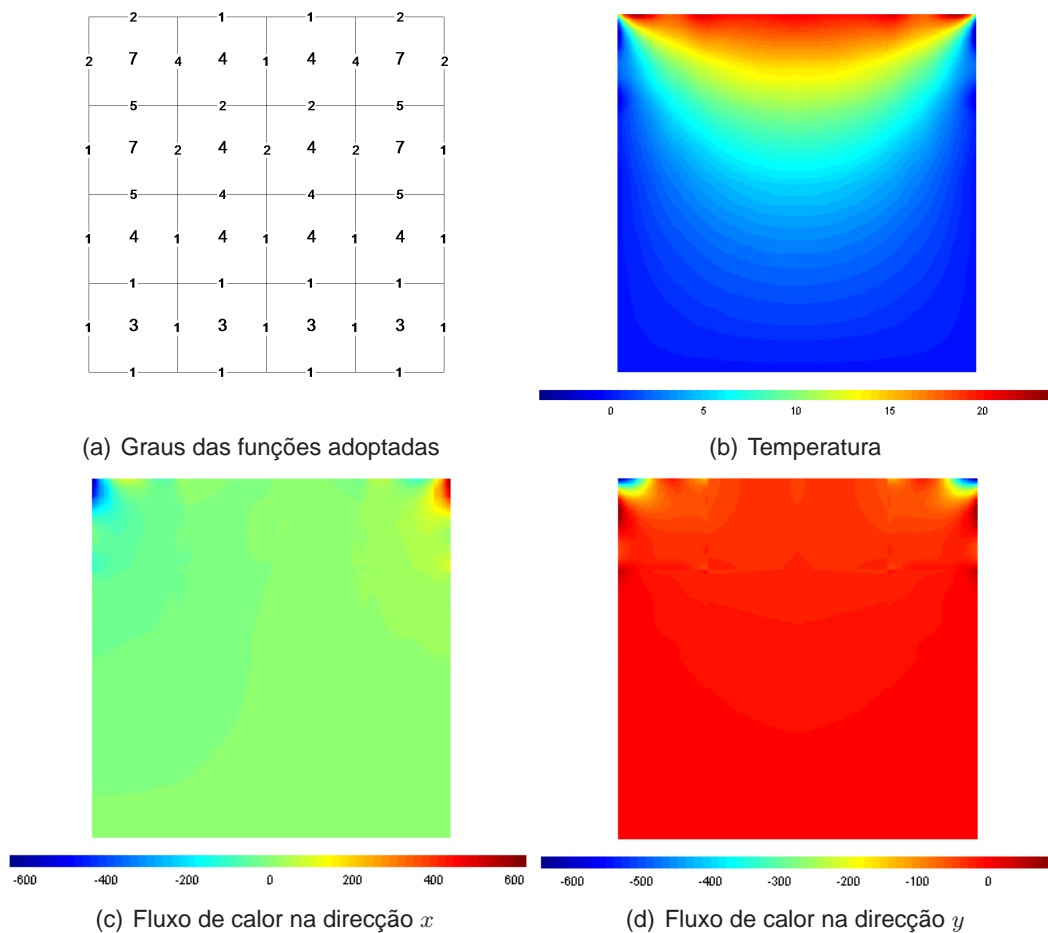


Figura 4.24: Teste 1

nas fronteiras onde há a descontinuidade da temperatura isto não é verdade. Nestas fronteiras uma imposição excessiva da continuidade das temperaturas leva a erros elevados nos resultados, devido a esta continuidade ser fisicamente incorrecta. Assim, para a correcta representação do modelo, é necessário relaxar a continuidade das temperaturas nessas fronteiras, adoptando funções de grau menor. Este fenómeno é discutido em mais pormenor, por exemplo, em [65].

Comparando os resultados obtidos com elementos convencionais (figuras 3.9 e 3.10), observa-se que os resultados da distribuição da temperatura são semelhantes (teste 1.1 e 1.2). O mesmo não é verificado relativamente ao campo dos fluxos de calor. Comparando com os fluxos obtidos no teste 1.1 a diferença é significativa, tanto na distribuição dos fluxos de calor no corpo como nos valores dos mesmos. Comparando agora com a situação mais refinada (teste 1.2), os resultados mostram uma melhoria significativa. No entanto a qualidade da solução obtida com elementos híbridos continua superior, apesar do número bastante inferior de graus de liberdade. Pode-se concluir, então, que a qualidade da solução obtida através dos elementos híbridos é bastante equilibrada, tanto para o campo de temperaturas como para o campo dos fluxos de calor. Esta particularidade

diferencia os elementos híbridos dos convencionais, nos quais a qualidade da solução cinemática é claramente superior.

O teste 2 foi modelado com 4 elementos, a indeterminação estática é de 72, a indeterminação cinemática é de 40 e o número total de graus de liberdade considerados é de 184. Neste teste é introduzido o efeito do calor gerado internamente no corpo. Dado a continuidade da solução modelada e a consequente redução da dificuldade numérica em comparação com o teste anterior, foi possível considerar menos elementos e graus de liberdade. O grau das funções adoptadas nas bases do domínio e fronteiras, bem como os resultados obtidos do teste 2, encontram-se representados na figura 4.25.

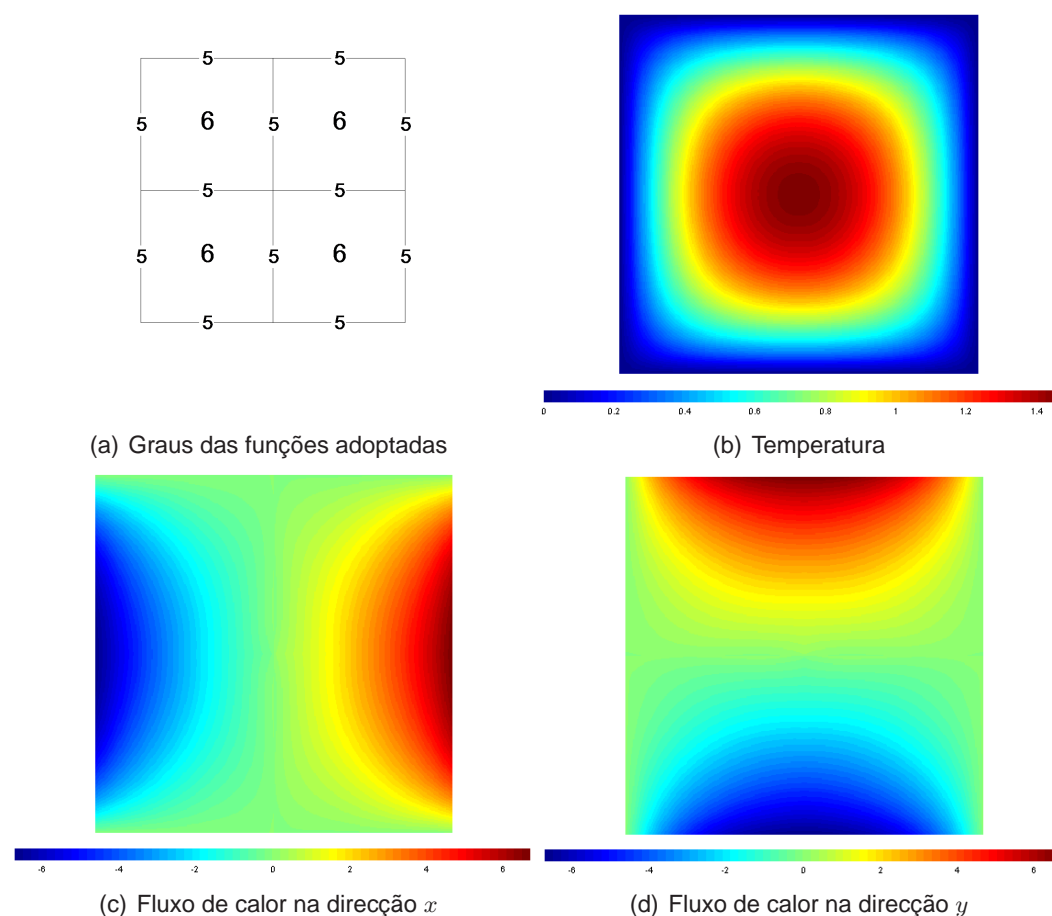


Figura 4.25: Teste 2

Estes resultados mostram a capacidade do modelo recuperar os campos de temperaturas e fluxos de calor devidos ao efeito do calor gerado internamente e a continuidade dos campos nas fronteiras entre elementos adjacentes.

Tal como foi visto no teste anterior, ao serem comparados estes resultados com os resultados obtidos com elementos finitos convencionais (figuras 3.12 e 3.13) constata-se que a superioridade numérica das funções de aproximação utilizadas nos elementos híbridos permite uma melhor representação do campo

das temperaturas para o mesmo número de graus de liberdade. No campo dos fluxos de calor há uma grande diferença, dada a descontinuidade dos campos obtidos com elementos convencionais, mesmo após o refinamento da malha.

Uma das vantagens da utilização da formulação em elementos finitos híbridos é que a escolha do tipo de funções das bases de aproximação, e o seu grau, não tem restrições, e que o refinamento pode ser feito independentemente em cada elemento e/ou fronteira. No entanto, uma vez que os elementos e fronteiras estão interligados, qualquer alteração numa base tem influência na solução. O aumento do número de funções no domínio e/ou fronteiras pode não se traduzir numa melhoria dos resultados ou pode piorar a solução noutra região. O equilíbrio entre as várias aproximações é fundamental, podendo conduzir a resultados precisos ou comprometer completamente a solução, o que foi claramente verificado no teste 1. Assim, a flexibilidade oferecida pela formulação híbrida pode ser encarada como uma vantagem para o utilizador familiarizado com o método, mas pode também ser encarada como uma desvantagem pelo utilizador inexperiente e é uma das principais razões do domínio dos elementos convencionais nos programas comerciais.

Após a análise da convergência do método e dos testes numéricos efectuados, na tabela 4.2 é apresentada uma comparação, resumida, entre os elementos finitos híbridos e convencionais.

Tabela 4.2: Comparação entre elementos finitos convencionais e elementos finitos híbridos

Elementos finitos convencionais	Elementos finitos híbridos
Estão implementados em diversos programas comerciais	Não existem em programas comerciais
As funções de aproximação são polinómios completamente definidos pelo número de nós do elemento	As funções de aproximação podem ser escolhidas livremente
Os pesos são quantidades físicas	Os pesos não têm significado físico
São pouco flexíveis o que os torna fáceis de utilizar. Só é necessário escolher o tipo de elemento que se quer utilizar e a geometria da malha	Muito flexíveis o que dificulta a sua utilização pelo analista inexperiente. Para além dos elementos e geometria da malha pode-se escolher qualquer tipo de base para cada elemento e para cada fronteira de Dirichlet e interior
As temperaturas são localmente contínuas mas os fluxos de calor, geralmente, não são	As temperaturas e os fluxos de calor são contínuos em "média"
Os elementos são localmente compatíveis	Os elementos não são nem localmente compatíveis nem equilibrados
O refinamento $p$ obriga à reformulação do elemento	Permite refinamento $p$ adaptativo sem perda dos dados obtidos anteriormente
É necessário somar as matrizes e os vectores do sistema	Não há somatório de matrizes ou vectores na construção do sistema resolutivo (sistema localizado), o que permite fazer refinamento localizado (nas quantidades cinemáticas e estáticas) e torna o modelo ideal para processamento paralelo

## Capítulo 5

# Elementos finitos híbridos-Trefftz

### 5.1 Introdução

Neste capítulo são formulados elementos finitos híbridos-Trefftz para a análise da condução térmica em regime estacionário. Os elementos híbridos-Trefftz são elementos híbridos que obedecem à condição de Trefftz [56], segundo a qual as funções de aproximação no domínio devem satisfazer a equação governativa do problema, neste caso a equação de Poisson. Assim, a base no domínio deixa de ser de livre escolha mas passa a conter informação física. Em tudo o resto os elementos híbridos-Trefftz são semelhantes aos elementos híbridos, e a sua apresentação vai ser feita com base nesta similitude.

No início do capítulo é apresentada a formulação dos elementos híbridos-Trefftz, com especial ênfase nas características que os diferenciam dos elementos híbridos. A seguir a uma sucinta apresentação da implementação destes elementos em ambiente Matlab, é avaliado o desempenho do modelo em termos de convergência e precisão para soluções analíticas conhecidas. É também analisado o efeito de refinamentos  $p$  e  $h$  no desempenho do modelo híbrido-Trefftz. São realizados testes numéricos mais complexos para análise e comparação dos modelos.

### 5.2 Equação dos elementos

A formulação em elementos finitos híbridos-Trefftz é derivada da formulação em elementos finitos híbridos correspondente, vista no capítulo anterior, através da utilização, no domínio do elemento, de um campo de aproximações que satisfaz localmente a equação diferencial governativa do problema. A formulação vai ser construída em coordenadas cartesianas, mantendo-se a forma dos elementos já vistos nos elementos convencionais e híbridos.

De modo a satisfazer a equação de Poisson,

$$\nabla^2 T(x, y) + \frac{Q}{k} = 0 \quad (5.1)$$

a temperatura no domínio vai ser aproximada por

$$\bar{T}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_D} U_i(x, y) X_i + U_p(x, y) = \mathbf{U}(x, y) \mathbf{X} + U_p(x, y) \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{X}$  são os coeficientes constantes correspondentes a  $\mathbf{U}$ , que é um conjunto de  $N_D$  soluções da equação de Laplace, forma homogênea da equação de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{U}(x, y) = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

e  $U_p$  é uma solução particular da equação de Poisson tal que

$$\nabla^2 U_p(x, y) = -\frac{Q}{k} \quad (5.4)$$

Para  $U_p$  adopta-se a solução particular já determinada na equação (2.47), dada por

$$U_p(x, y) = -\frac{Q}{4k} (x^2 + y^2) \quad (5.5)$$

Com a adopção de bases de aproximação no domínio específicas do problema, espera-se o aumento da convergência da solução e da robustez numérica, diminuição da sensibilidade à distorção da malha e melhor desempenho para oscilações das soluções. No entanto, com a condição de Trefftz, perde-se a flexibilidade na escolha da base  $\mathbf{U}$  que caracterizava os elementos híbridos, e obtêm-se funções que podem ser mais complexas numericamente e não ter integração analítica.

Para além das soluções regulares da equação homogênea podem ser encontradas soluções singulares da equação (5.3), que podem ser acrescentadas à base regular quando se pretende modelar problemas com singularidades.

A aproximação do fluxo de calor nas fronteiras de Dirichlet não sofre qualquer alteração nos elementos híbridos-Trefftz em relação aos elementos híbridos, sendo dada por

$$\mathbf{n} \bar{q}(x, y) = \sum_{j=1}^{N_\Gamma} Z_j(s) Y_j = \mathbf{Z}(s) \mathbf{Y} \quad (5.6)$$

onde  $N_\Gamma$  é o número de termos considerados na base de aproximação da fronteira de Dirichlet,  $\mathbf{Z}$ , e  $\mathbf{Y}$  é o vector dos coeficientes constantes correspondentes.

Tanto a base  $\mathbf{U}$  como a base  $\mathbf{Z}$  têm de ser completas e linearmente independentes.

Substituindo na equação (4.3), deduzida para os elementos finitos híbridos, a nova aproximação da temperatura (5.2), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{U})^T k \nabla \mathbf{U} d\Omega \mathbf{X} + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{U})^T k \nabla U_p d\Omega + \int_{\Gamma_u} \mathbf{U}^T \mathbf{Z} d\Gamma_u \mathbf{Y} + \\ \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}^T q_\Gamma d\Gamma_\sigma - \int_{\Omega} \mathbf{U}^T Q d\Omega = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Uma das características mais importantes dos elementos finitos híbridos-Trefftz é que todos os integrais presentes na expressão (5.7) podem ser reduzidos a integrais de fronteira, aplicando o teorema de Green. Assim, integrando por partes o primeiro termo da equação (5.7) obtém-se,

$$\int_{\Omega} (\nabla U)^T k \nabla U d\Omega = - \int_{\Omega} U^T k \nabla^2 U d\Omega + \int_{\Gamma} U^T (n k \nabla U) d\Gamma \quad (5.8)$$

Tendo em conta a equação (5.3), o termo de domínio anula-se e o integral é reduzido à forma,

$$\int_{\Omega} (\nabla U)^T k \nabla U d\Omega = \int_{\Gamma} U^T (n k \nabla U) d\Gamma \quad (5.9)$$

Aplicando o teorema de Green ao segundo termo da equação (5.7), obtém-se

$$\int_{\Omega} (\nabla U)^T k \nabla U_p d\Omega = - \int_{\Omega} U^T k \nabla^2 U_p d\Omega + \int_{\Gamma} U^T (n k \nabla U_p) d\Gamma \quad (5.10)$$

Substituindo as equações (5.9) e (5.10) em (5.7) obtém-se a equação

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U^T (n k \nabla U) d\Gamma X + \int_{\Gamma} U^T (n k \nabla U_p) d\Gamma - \int_{\Omega} U^T k \nabla^2 U_p d\Omega + \\ \int_{\Gamma_u} U^T Z d\Gamma_u Y + \int_{\Gamma_{\sigma}} U^T q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma} - \int_{\Omega} U^T Q d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Tendo em conta a equação (5.4), demonstra-se que o terceiro e o último termo da equação anterior anulam-se:

$$- \int_{\Omega} U^T k \nabla^2 U_p d\Omega - \int_{\Omega} U^T Q d\Omega = - \int_{\Omega} U^T (k \nabla^2 U_p + Q) d\Omega = 0 \quad (5.12)$$

Assim, a equação (5.11) pode ser escrita na forma

$$KX + BY = -K_p - q_{\Gamma} \quad (5.13)$$

com

$$K = \int_{\Gamma} U^T (n k \nabla U) d\Gamma \quad (5.14)$$

$$B = \int_{\Gamma_u} U^T Z d\Gamma_u \quad (5.15)$$

$$K_p = \int_{\Gamma} U^T (n k \nabla U_p) d\Gamma \quad (5.16)$$

$$q_{\Gamma} = \int_{\Gamma_{\sigma}} U^T q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma} \quad (5.17)$$

Tal como nos elementos finitos híbridos, a condição de fronteira de Dirichlet é introduzida em forma fraca,

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T (\bar{T} - T_\Gamma) d\Gamma_u = 0 \quad (5.18)$$

Substituindo a equação (5.2) em (5.18) obtém-se

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T \mathbf{U} d\Gamma_u \mathbf{X} + \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T U_p d\Gamma_u = \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u \quad (5.19)$$

ou

$$\mathbf{B}^T \mathbf{X} = \mathbf{t}_\Gamma - \mathbf{t}_p \quad (5.20)$$

com

$$\mathbf{t}_\Gamma = \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u \quad (5.21)$$

e

$$\mathbf{t}_p = \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T U_p d\Gamma_u \quad (5.22)$$

Quando há mais do que um elemento, é necessário impor uma condição de continuidade de temperatura entre os elementos adjacentes. Considerando uma fronteira interior,  $\Gamma_{int}$ , partilhada por dois elementos, um elemento 1 com temperatura  $T_1$  e outro elemento 2 com temperatura  $T_2$  nessa fronteira, a condição é dada por

$$\int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T (\bar{T}_1 - \bar{T}_2) d\Gamma_{int} = 0 \quad (5.23)$$

Substituindo a equação (5.2) em (5.23) obtém-se

$$\int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T U_1 d\Gamma_{int} \mathbf{X}_1 + \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T U_{p1} d\Gamma_{int} - \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T U_2 d\Gamma_{int} \mathbf{X}_2 - \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{Z}^T U_{p2} d\Gamma_{int} = 0 \quad (5.24)$$

ou na forma matricial,

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_1 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 = \mathbf{t}_{p2} - \mathbf{t}_{p1} \quad (5.25)$$

Das equações (5.13) e (5.20), ou (5.25) para fronteiras interiores, obtém-se o sistema resolutivo dos elementos híbridos-Trefftz,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{K}_p - \mathbf{q}_\Gamma \\ \mathbf{t}_\Gamma - \mathbf{t}_p \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Observa-se que o sistema (5.26) é semelhante ao sistema (4.16) da formulação híbrida e, como tal, as suas propriedades mantêm-se.

As semelhanças nos sistemas permitem a implementação de elementos híbridos-Trefftz em programas onde estão implementados elementos híbridos sem



ser necessária uma adaptação significativa.

Os modelos híbridos-Trefftz têm a particularidade de combinar as características mais interessantes das formulações em elementos finitos convencionais e elementos de fronteira uma vez que eles produzem sistemas resolventes que são simétricos e esparsos e descritos por expressões de integrais de fronteira. Uma consequência directa do facto de todos os integrais de domínio se reduzirem a integrais na fronteira é que as restrições de topologia típicas aos elementos convencionais (mas também presentes, com menos restrições, nos elementos híbridos) desaparecem. Os elementos híbridos-Trefftz não necessitam de ser convexos ou simplesmente conexos e podem ter um número arbitrário de arestas. Esta propriedade é característica da formulação em elementos finitos Trefftz.

De modo a demonstrar a aplicação da formulação desenvolvida, no apêndice C é resolvido o exemplo já visto com elementos convencionais no apêndice A, e com elementos híbridos no apêndice B, agora aplicando elementos finitos híbridos-Trefftz.

## 5.3 Implementação

### 5.3.1 Geometria e condições de fronteira

Tal como no caso dos elementos híbridos, foram implementados elementos de forma rectangular. Os referenciais correspondentes ao elemento no domínio e fronteira encontram-se na figura 4.2.

No domínio, para a base  $U$  foram adoptadas funções retiradas da solução analítica da equação de Laplace, dadas pelas equações (2.43) e (2.46).

A base, definida no referencial  $xy$ , é dada por

$$U(x, y) = \{U_l(x, y) \quad U_n(x, y)\} \quad (5.27)$$

onde  $U_l$  é a componente linear da base, dada por

$$U_l(x, y) = \{1, x, y, xy\} \quad (5.28)$$

e  $U_n$  é a componente não linear da base, dada por

$$U_n(x, y) = \{e^{n_D x} \sin(n_D y), e^{n_D x} \cos(n_D y), e^{n_D y} \sin(n_D x), e^{n_D y} \cos(n_D x)\} \\ , (\forall) n_D \in \mathbb{Z}^* \quad (5.29)$$

Nas equações (5.27) e (5.29),  $n_D$  é a ordem da aproximação, sendo sempre um número inteiro. A cada ordem  $n_D$  da base correspondem quatro funções. O número total de funções numa base de ordem  $n_D$  é  $N_D = 4(n_D + 1)$ . A base adoptada no domínio é linearmente independente e completa.

Nas fronteiras de Dirichlet e interiores a base de aproximação usada é a mesma que a usada nos elementos híbridos, polinomial, dada pela equação (4.17).

Toda a restante implementação é igual à já vista para os elementos finitos híbridos, na secção 4.3.1.

### 5.3.2 Construção e resolução do sistema

No estudo dos elementos híbridos, como foi visto, dado que se utilizam funções polinomiais em ambas as bases, faz sentido físico adoptar para a base na fronteira funções com grau inferior ao grau das funções adoptadas na base do domínio. Nos elementos híbridos-Trefftz o tipo de funções adoptadas nas bases no domínio e fronteira é diferente. No domínio existem funções lineares, exponenciais e trigonométricas e nas fronteiras apenas funções polinomiais, pelo que não faz sentido falar da mesma restrição. Mesmo assim, foram adoptadas para a base na fronteira funções de grau inferior à ordem das funções da base no domínio para garantir a indeterminação cinemática do sistema resultante, como se vai discutir a seguir.

Tal como foi visto na secção 4.3.2, uma condição necessária para garantir que o sistema não contém equações linearmente dependentes é garantir que o sistema é estática e cinematicamente indeterminado. O número de indeterminação e o número de incógnitas estáticas e cinemáticas do sistema é calculado do mesmo modo que para os elementos híbridos.

De seguida vai ser visto se o grau das funções de aproximação nos domínios e nas fronteiras garante que o sistema é cinematicamente indeterminado.

Uma base no domínio que inclua funções de ordem  $n_D$  tem um total de  $N_D$  funções, dado por

$$N_D = 4(n_D + 1) \quad (5.30)$$

Uma base na fronteira de grau  $n_\Gamma$  inclui  $N_\Gamma$  funções, com  $N_\Gamma$  dado por

$$N_\Gamma = n_\Gamma + 1 \quad (5.31)$$

Por simplicidade e não limitando o âmbito da demonstração, assume-se que o sistema (5.26) é escrito para uma malha composta por um único elemento e considera-se que é usado o mesmo grau de refinamento  $p$  nas bases de todas as fronteiras de Dirichlet.

Neste caso, o problema é sempre estáticamente indeterminado desde que haja, pelo menos, uma fronteira de Dirichlet. Para o problema ser cinematicamente indeterminado é necessário que

$$N_D > n_s N_\Gamma \quad (5.32)$$

onde  $n_s$  é o número de lados do elemento que formam a fronteira de Dirichlet. Vai ser analisado o caso mais condicionante, em que os quatro lados do elemento formam a fronteira de Dirichlet,  $n_s = 4$ .

Se a ordem das funções no domínio for um ( $n_D = 1$ ), a base de aproximação no domínio contém oito funções ( $N_D = 8$ ), e o número máximo de funções em cada fronteira para satisfazer a condição de indeterminação cinemática é um ( $N_\Gamma = 1$ ), ou seja, nas fronteiras, a base pode ter, no máximo, uma função, o que corresponde à base ser uma constante ( $n_\Gamma = 0$ ).

Este exemplo e outros obtidos seguindo o mesmo raciocínio são apresentados na tabela 5.1. Pela tabela verifica-se que para o caso particular analisado aqui, onde as bases nos quatro lados do elemento têm todas o mesmo número de funções,

Tabela 5.1: Verificação da indeterminação cinemática do sistema

$n_D$	$N_D$	$n_\Gamma$	$N_\Gamma$
1	8	0	1
2	12	1	2
3	16	2	3
4	20	3	4

adoptar no domínio uma base cuja ordem seja superior ao grau máximo da base na fronteira garante sempre que o sistema é cinematicamente indeterminado.

Quando se considera uma malha com mais do que um elemento, a condição passa a ter em conta o número de funções da totalidade do domínio e da totalidade das fronteiras. Para estes casos, a condição fica menos restritiva, já que passam a haver fronteiras partilhadas por dois elementos.

Apesar de nos testes ter sido sempre garantido que os sistemas são estática e cinematicamente indeterminados, verificou-se que com o aumento do número de graus de liberdade os sistemas apresentam um número de condição elevado, tornando-se mal condicionados. Nos testes onde foi verificado o mau condicionamento do sistema foram adoptadas medidas de estabilização da solução. Foi utilizada uma resolução iterativa, a qual vai ser descrita de seguida.

Considere-se um sistema linear da forma

$$A x = b$$

onde  $A$  é uma matriz e  $x$  e  $b$  são vectores. Devido ao sistema resolutivo ser mal condicionado, o vector  $x_0$  que se obtém da resolução do sistema anterior origina um resíduo,  $Res_0$ , da forma

$$Res_0 = b - A x_0$$

Resolvendo agora o sistema linear

$$A \delta x_0 = Res_0$$

obtém-se um vector  $\delta x_0$  que somado ao vector  $x_0$  inicial dá a primeira iteração,

$$x_1 = x_0 + \delta x_0$$

As iterações são repetidas sucessivamente até se obter um erro relativo suficientemente pequeno entre as soluções. Os sistemas são resolvidos utilizando a pseudo-inversa da matriz  $A$ , que dá a solução de norma mínima do sistema  $A x = b$ .

Uma dificuldade comum encontrada na implementação dos elementos híbridos-Trefftz é que devido à natureza oscilatória das funções, estas muitas vezes não têm integração analítica e a integração numérica requer um esforço computacional significativo para se conseguir um nível elevado de precisão. Neste

estudo em particular, ao ser considerado o sistema de coordenadas cartesiano na definição das funções de aproximação e ao serem adotados elementos finitos de forma regular, foi possível que as integrações fossem feitas analiticamente.

### 5.3.3 Construção da solução

A solução do sistema (5.26) fornece uma estimativa única para o campo de temperaturas, tanto no domínio como nas fronteiras. Estes campos são calculados utilizando a definição (5.2), como

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(e)}(x, y) &= U_p^{(e)}(x, y) + \mathbf{U}^{(e)}(x, y) \mathbf{X}^{(e)} = -\frac{Q}{4k} (x^2 + y^2) + \\ &\quad \left\{ \begin{matrix} 1 & x & y & xy & e^x \sin(y) & e^x \cos(y) & e^y \sin(x) & e^y \cos(y) & \dots \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} X_1^{(e)} \\ X_2^{(e)} \\ X_3^{(e)} \\ X_4^{(e)} \\ X_5^{(e)} \\ X_6^{(e)} \\ X_7^{(e)} \\ X_8^{(e)} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \\ &= -\frac{Q}{4k} (x^2 + y^2) + X_1^{(e)} + X_2^{(e)}x + X_3^{(e)}y + X_4^{(e)}xy + X_5^{(e)}e^x \sin(y) + \\ &\quad X_6^{(e)}e^x \cos(y) + X_7^{(e)}e^y \sin(x) + X_8^{(e)}e^y \cos(x) + \dots \end{aligned} \quad (5.33)$$

No domínio há uma estimativa única do campo dos fluxos de calor, calculada a partir da aproximação do campo de temperaturas, pela lei de Fourier (2.4)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}^{(e)}(x, y) &= -k \nabla \bar{T}^{(e)}(x, y) = -k \nabla U_p^{(e)}(x, y) - k \left[ \nabla \mathbf{U}^{(e)}(x, y) \right] \mathbf{X}^{(e)} = \frac{Q}{2} \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} - \\ &\quad k \left[ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & y & e^x \sin(y) & e^x \cos(y) & e^y \cos(x) & -e^y \sin(x) & \dots \\ 0 & 0 & 1 & x & e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) & e^y \sin(x) & e^y \cos(y) & \dots \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} X_1^{(e)} \\ X_2^{(e)} \\ X_3^{(e)} \\ X_4^{(e)} \\ X_5^{(e)} \\ X_6^{(e)} \\ X_7^{(e)} \\ X_8^{(e)} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Na direcção  $x$  o fluxo de calor no domínio é dado por

$$\bar{q}_x^{(e)}(x, y) = \frac{Q}{2}x - k(X_2^{(e)} + X_4^{(e)}y + X_5^{(e)}e^x \sin(y) + X_6^{(e)}e^x \cos(y) + X_7^{(e)}e^y \cos(x) - X_8^{(e)}e^y \sin(x) + \dots) \quad (5.35)$$

e na direcção  $y$  por

$$\bar{q}_y^{(e)}(x, y) = \frac{Q}{2}y - k(X_3^{(e)} + X_4^{(e)}x + X_5^{(e)}e^x \cos(y) - X_6^{(e)}e^x \sin(y) + X_7^{(e)}e^y \sin(x) + X_8^{(e)}e^y \cos(x) + \dots) \quad (5.36)$$

Pelo contrário, nas fronteiras interiores e de Dirichlet, obtém-se uma estimativa múltipla do campo de fluxos de calor normais, estes podendo ser calculados a partir do vector  $\mathbf{Y}^{(\Gamma)}$  de cada fronteira  $\Gamma$ , na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(\Gamma)} \bar{\mathbf{q}}^{(\Gamma)}(x, y) &= \mathbf{Z}^{(\Gamma)}(s) \mathbf{Y}^{(\Gamma)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & s & s^2 & s^3 & \dots \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} Y_1^{(\Gamma)} \\ Y_2^{(\Gamma)} \\ Y_3^{(\Gamma)} \\ Y_4^{(\Gamma)} \\ \vdots \end{matrix} \right\} \\ &= Y_1^{(\Gamma)} + Y_2^{(\Gamma)}s + Y_3^{(\Gamma)}s^2 + Y_4^{(\Gamma)}s^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.37)$$

ou a partir do vector  $\mathbf{X}^{(e)}$ , na forma

$$\mathbf{n}^{(\Gamma)} \bar{\mathbf{q}}^{(\Gamma)}(x, y) = - \left\{ \begin{matrix} n_x & n_y \end{matrix} \right\} k \nabla U_p^{(e)}(x, y) - \left\{ \begin{matrix} n_x & n_y \end{matrix} \right\} k \left[ \nabla U^{(e)}(x, y) \right] \mathbf{X}^{(e)} \quad (5.38)$$

Quando se trata de fronteiras interiores, os fluxos de calor nas fronteiras podem ainda ser calculados pela relação (5.38) a partir dos dois elementos que partilham a fronteira. As aproximações dos fluxos de calor nas fronteiras através das diferentes soluções obtidas podem ser comparadas para estimar convergência. É de notar que nunca foi imposta a condição de continuidade dos fluxos de calor entre elementos adjacentes e esta continuidade só é verificada se houver convergência.

## 5.4 Convergência

A convergência é estudada resolvendo os problemas já definidos no estudo dos elementos híbridos na secção 4.4.1.

Verifica-se que para os valores do parâmetro  $a$  adoptados na construção da solução analítica (4.27) a solução não está contida nas bases de aproximação (5.27) adoptadas nos elementos híbridos-Trefftz.

### 5.4.1 Definição do modelo

O modelo adoptado nos testes feitos com elementos híbridos-Trefftz é o mesmo adoptado nos testes com elementos híbridos.

Também neste caso, para o estudo da convergência para refinamento  $h$ , foram adoptadas malhas com 1, 4, 9 e 16 elementos quadrados iguais, como se mostra na figura 4.9.

Em cada uma das malhas mencionadas procede-se ao refinamento  $p$ , aumentando o número de funções nas bases de aproximação no domínio, garantindo sempre que estas se mantêm completas e linearmente independentes. Na base do domínio consideraram-se funções de ordem  $n_D = \{1, 2, 3, 4\}$ , e na base das fronteiras correspondentes, os graus das funções considerados foram de  $n_\Gamma = \{0, 1, 2, 3\}$ . Em cada uma das simulações foram utilizadas bases de refinamento constante, tanto no domínio como nas fronteiras interiores e de Dirichlet, em todos os elementos.

Em todos os modelos o sistema é estática e cinemáticamente indeterminado.

O erro e a taxa de convergência são determinados da mesma forma descrita no capítulo anterior, na secção 4.4.2.

### 5.4.2 Resultados

Os resultados da distribuição de temperatura e fluxos de calor obtidos em cada um dos refinamentos considerados são apresentados de seguida. Em cada um dos resultados é indicado o número de elementos considerados na malha e a ordem das funções da base no domínio,  $e$  e  $n_D$ , respectivamente.

Pela análise visual das figuras dos resultados (figuras 5.1 a 5.12), por comparação com as figuras das soluções exactas (figuras 4.5 a 4.8), observa-se que tanto o campo de temperaturas como o dos fluxos de calor são efectivamente recuperados.

A continuidade entre elementos adjacentes é também recuperada nos modelos, com excepção dos refinamentos onde são adoptadas funções de ordem um no domínio ( $n_D=1$ ). Nestes modelos a descontinuidade entre os elementos é bastante evidente, tanto nas soluções do campo das temperaturas como dos fluxos de calor. É de notar que, quando se utilizam no domínio bases de aproximação com funções de ordem um, as bases da fronteira são funções polinomiais de grau zero. Esta adopção de funções constantes nas bases das fronteiras induz a erros grandes, não permitindo obter soluções contínuas entre os elementos.

Ao contrário do que foi observado nos mesmos testes utilizando elementos finitos híbridos, com elementos híbridos-Trefftz o aumento da oscilação não obriga ao aumento dos refinamentos para se obter a mesma qualidade da solução. Esta característica é mais evidente comparando o campo dos fluxos de calor obtidos com os dois tipos de elementos.

Outra diferença bastante evidente entre os elementos é nas aproximações do campo dos fluxos de calor, onde com elementos híbridos-Trefftz se consegue obter uma qualidade da solução mais próxima à qualidade da solução obtida do campo das temperaturas. Esta característica dos elementos híbridos-Trefftz deve-se à natureza das funções de aproximação no domínio, estabelecidas

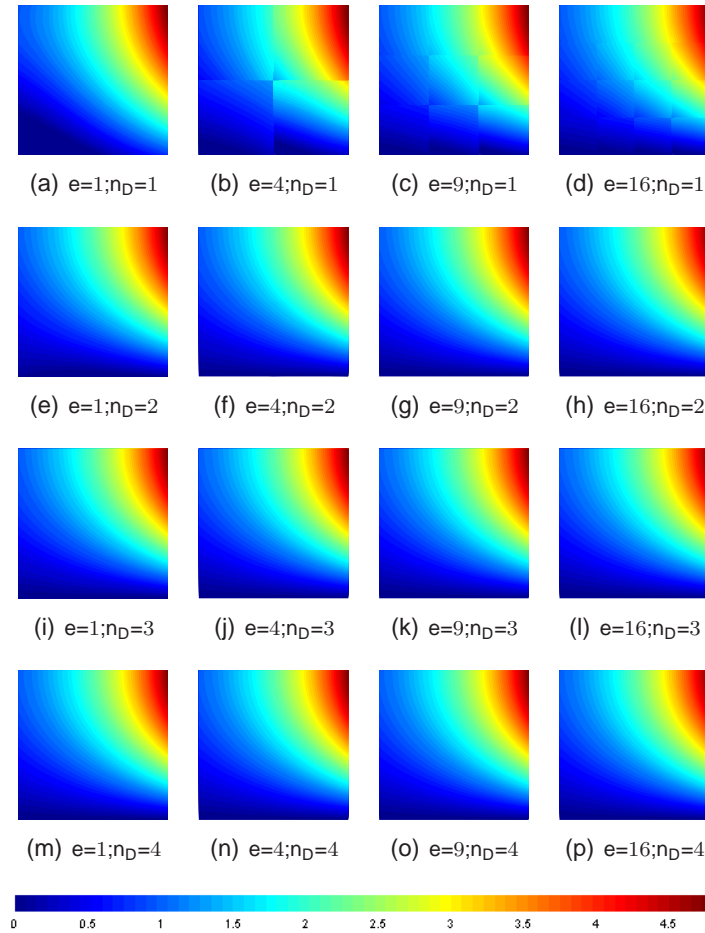


Figura 5.1: Temperatura para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$

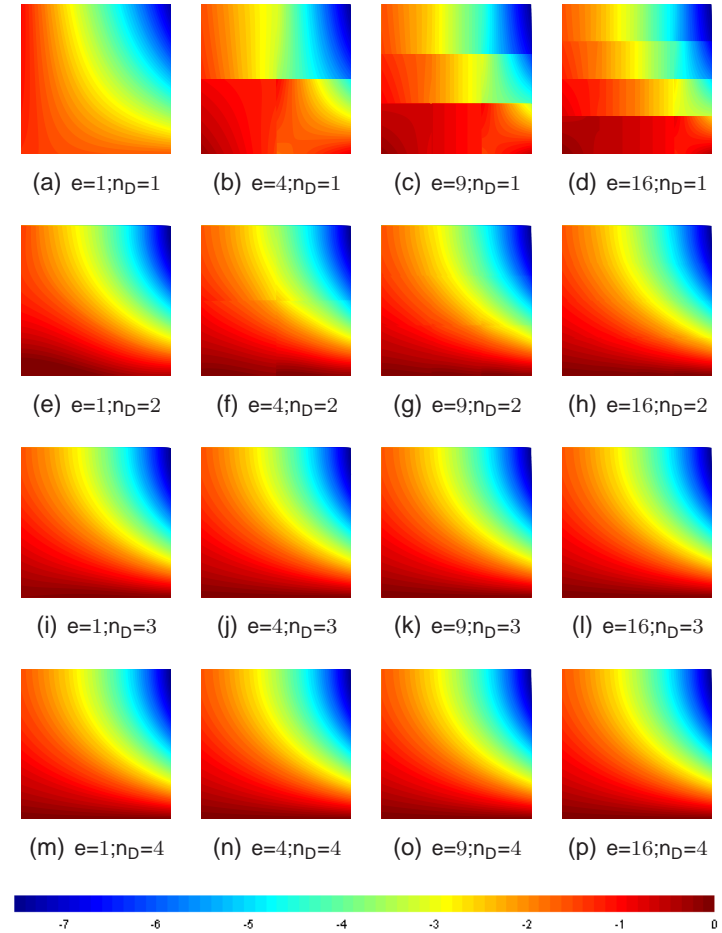


Figura 5.2: Fluxo de calor na direcção  $x$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$

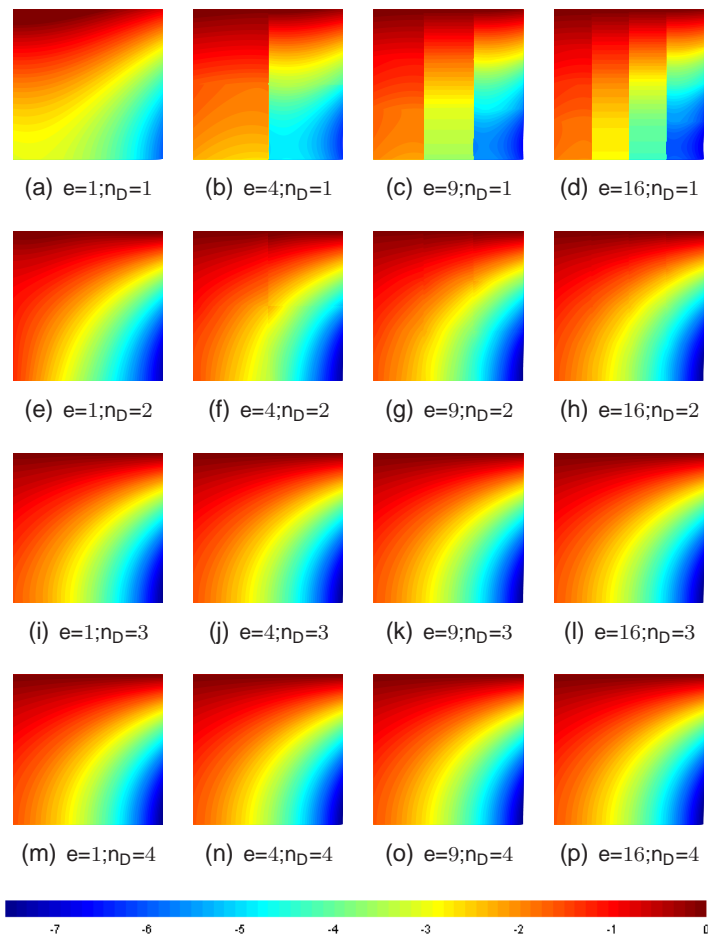


Figura 5.3: Fluxo de calor na direcção  $y$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\bar{y}\right)$

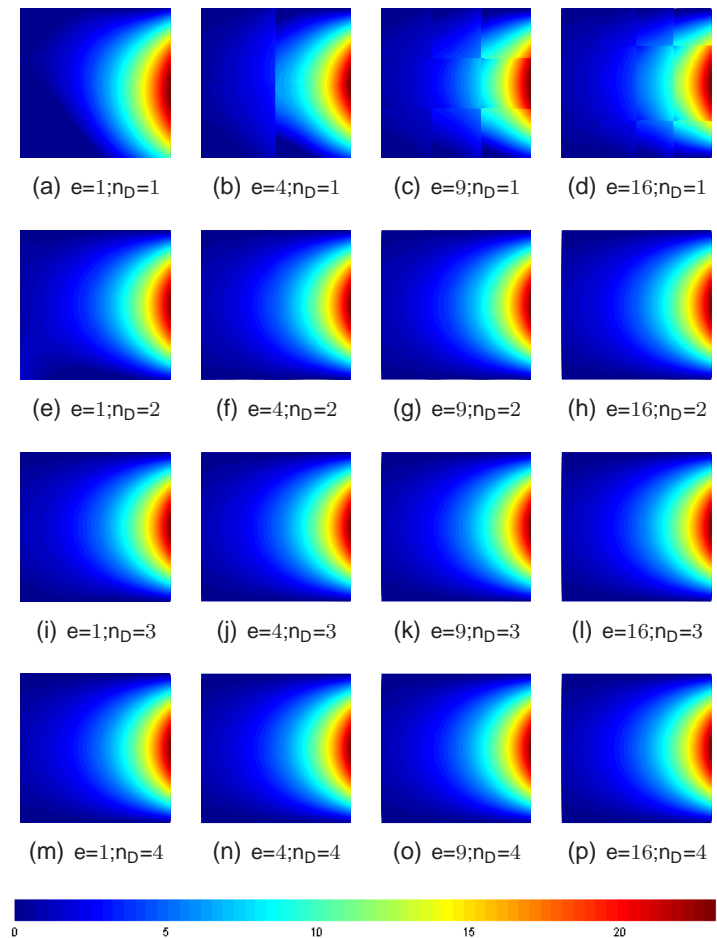


Figura 5.4: Temperatura para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi\bar{x}} \sin(\pi\bar{y})$



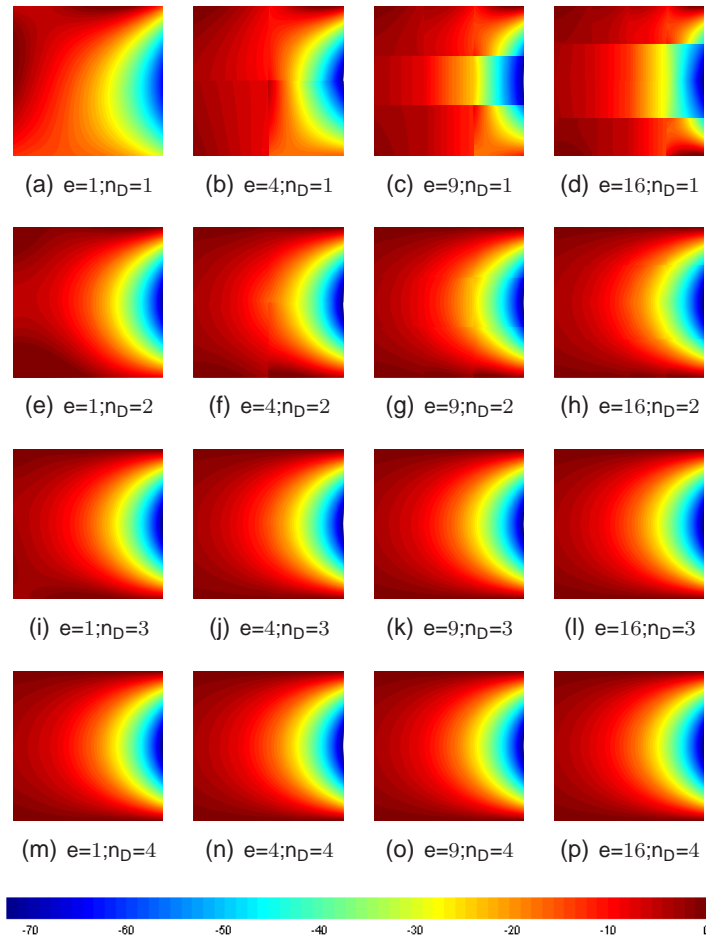


Figura 5.5: Fluxo de calor na direcção  $x$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi \bar{x}} \sin(\pi \bar{y})$

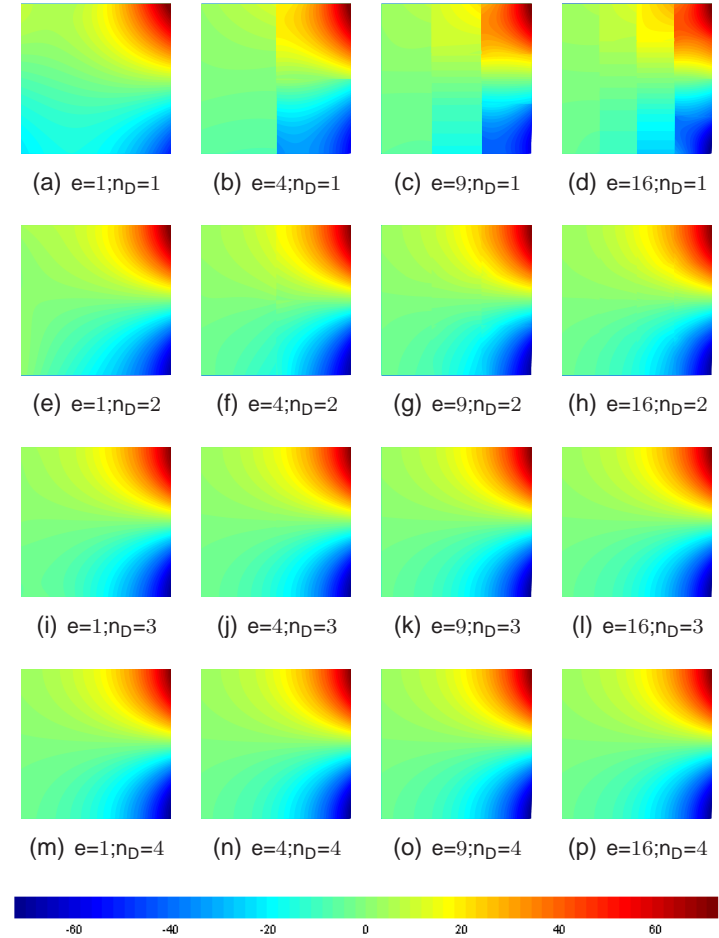


Figura 5.6: Fluxo de calor na direcção  $y$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\pi \bar{x}} \sin(\pi \bar{y})$

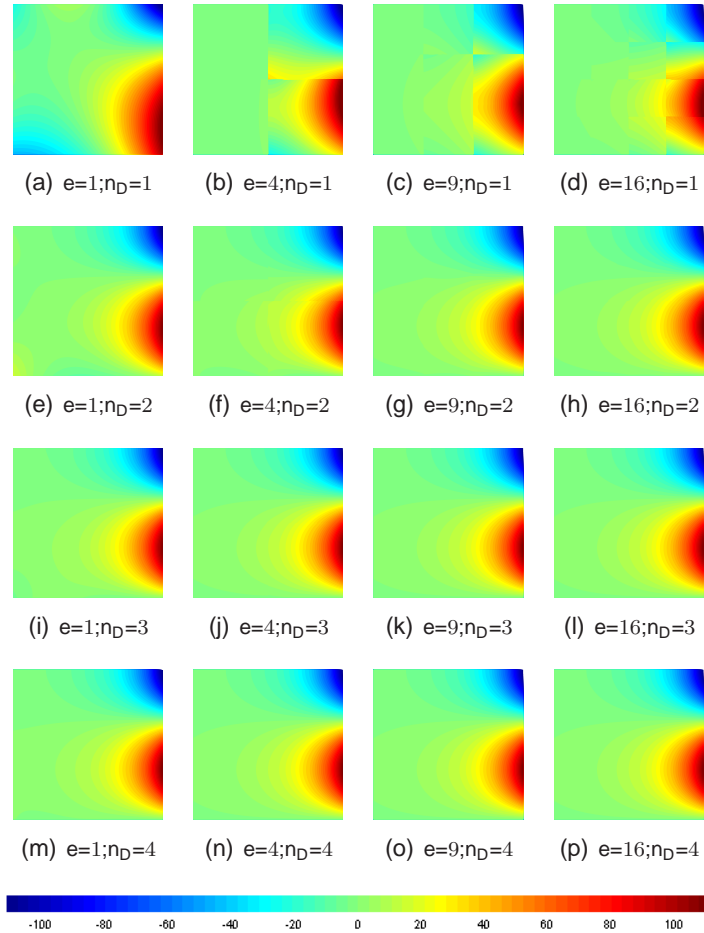


Figura 5.7: Temperatura para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\bar{y}\right)$

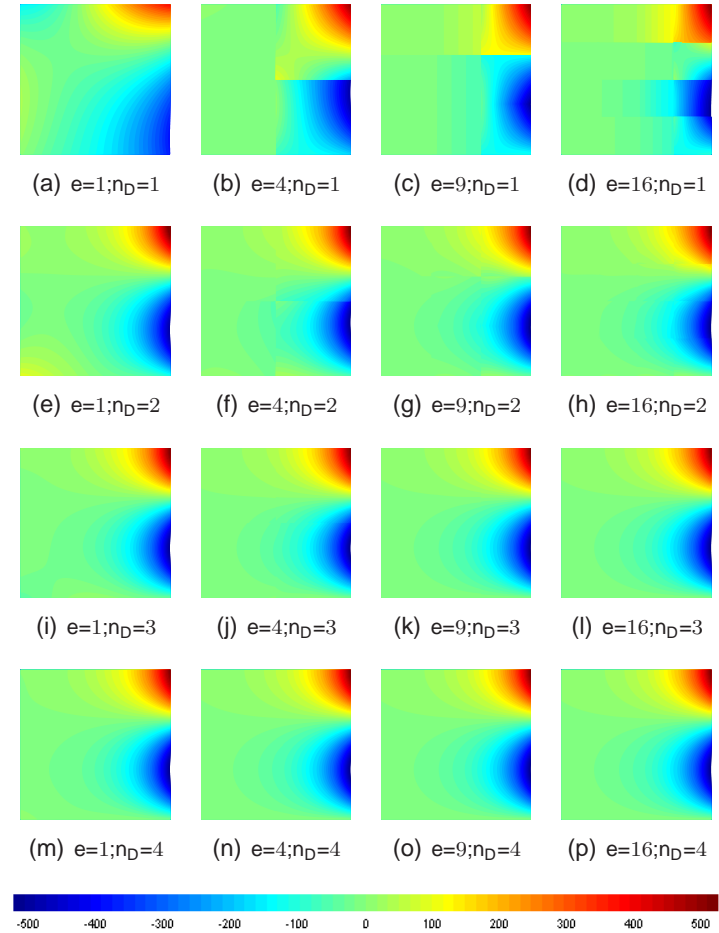


Figura 5.8: Fluxo de calor na direcção  $x$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\bar{y}\right)$

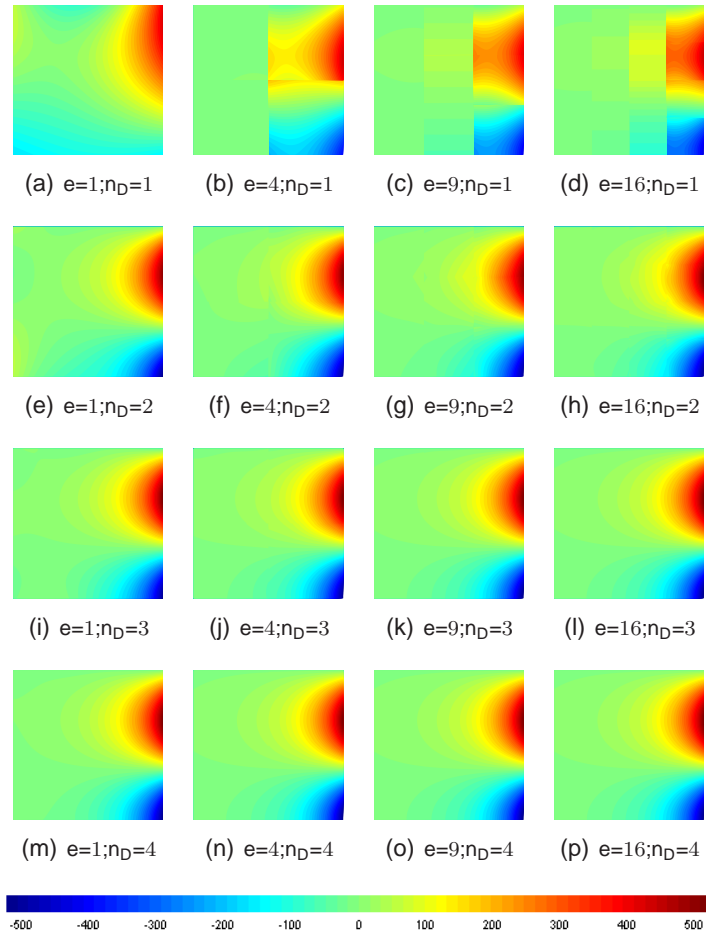


Figura 5.9: Fluxo de calor na direcção  $y$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{\frac{3\pi}{2}\bar{x}} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\bar{y}\right)$

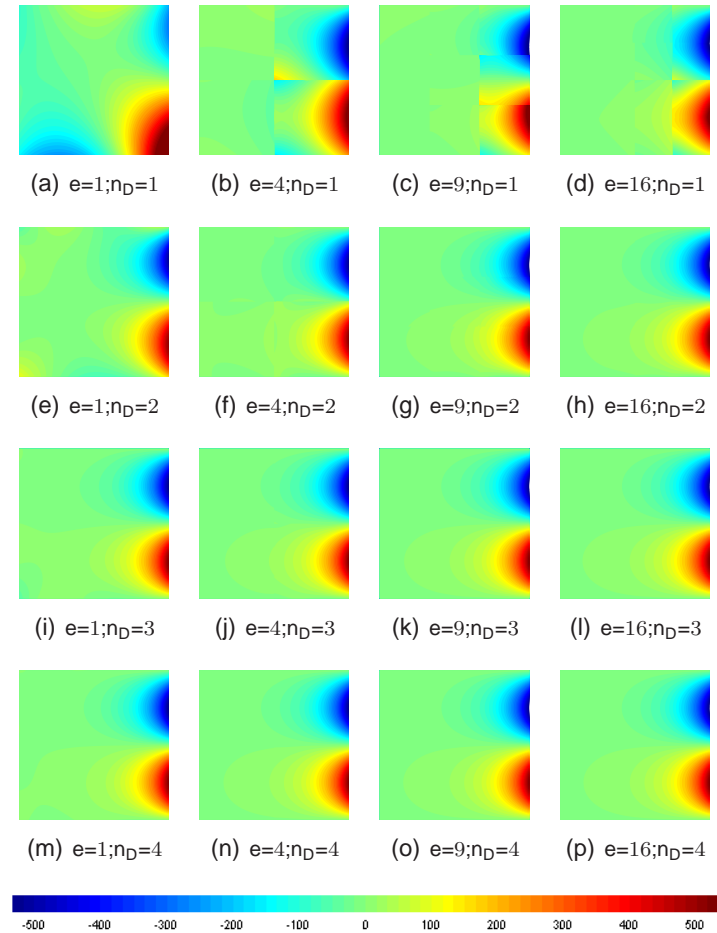


Figura 5.10: Temperatura para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi\bar{x}} \sin(2\pi\bar{y})$

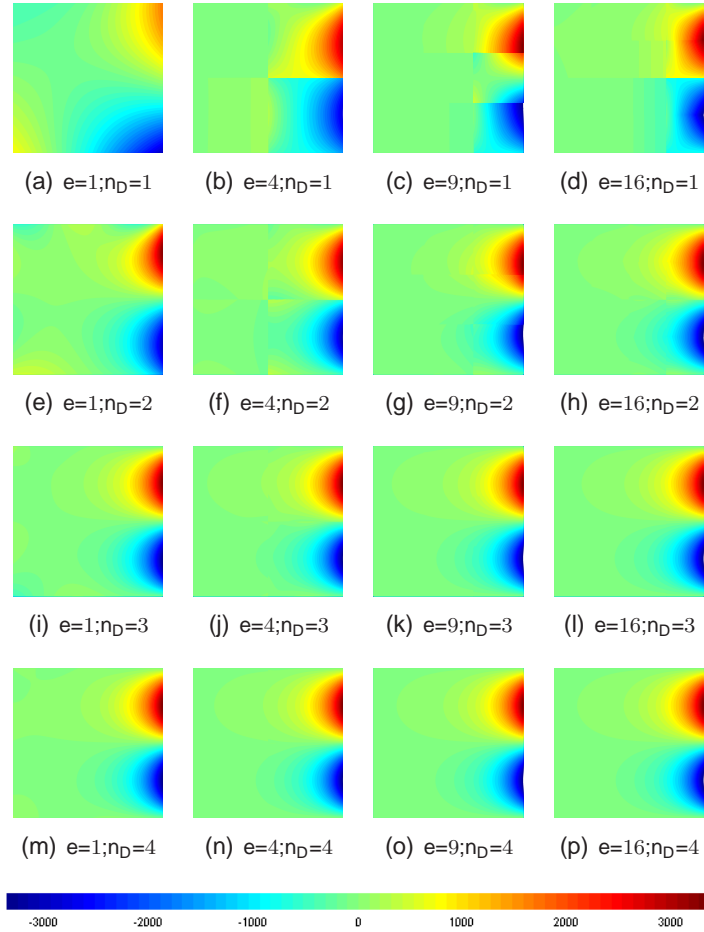


Figura 5.11: Fluxo de calor na direcção  $x$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi\bar{x}} \sin(2\pi\bar{y})$

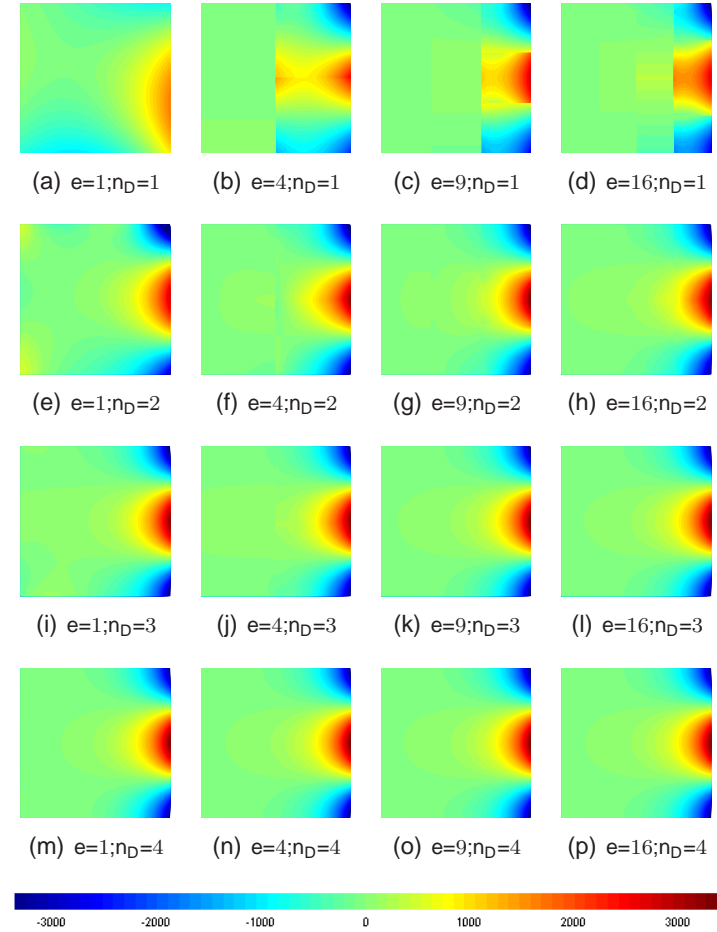


Figura 5.12: Fluxo de calor na direcção  $y$  para  $T(\bar{x}, \bar{y}) = e^{2\pi\bar{x}} \sin(2\pi\bar{y})$

especificamente para o problema, o que se traduz em funções mais complexas para as aproximações da temperatura e das suas derivadas.

A convergência das soluções obtidas em cada um dos modelos, para refinamentos  $p$  e  $h$ , encontra-se na figura 5.13.

Cada um dos gráficos contém quatro linhas com marcadores correspondentes ao refinamento  $p$  com as malhas de um, quatro, nove e dezasseis elementos, e quatro linhas sem marcadores que representam a convergência  $h$  obtida usando o mesmo grau de refinamento no domínio dos elementos.

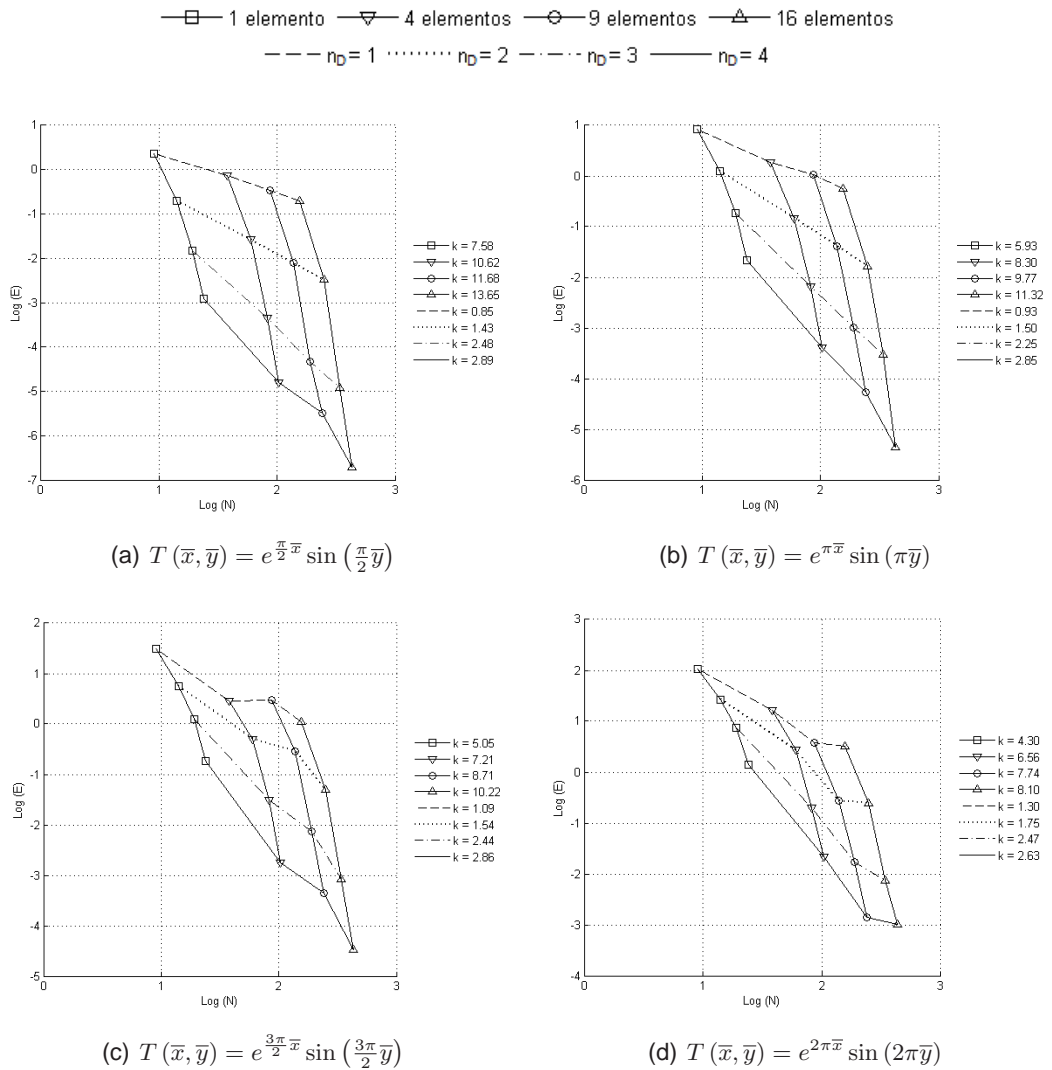


Figura 5.13: Convergência da solução para refinamentos  $p$  e  $h$

Dos gráficos da análise de convergência é possível concluir que as soluções mais oscilatórias têm erros relativos maiores e que o refinamento  $p$  é sempre mais eficiente que o refinamento  $h$ . Conclui-se também que o aumento de um tipo de refinamento melhora a eficácia do outro, fazendo com que a sua convergência aumente.

No caso dos elementos convencionais, a taxa de convergência para refinamento  $h$

é conhecida e tem o valor de 2, 3, 4 e 5 para elementos com funções de aproximação no domínio de graus 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Analisando na figura 5.13 as taxas de convergência correspondentes, sem marcadores, conclui-se que se conseguem sempre resultados melhores para refinamento  $h$  com elementos convencionais. No entanto, com o refinamento  $p$  os elementos híbridos-Trefftz oferecem taxas de convergência muito superiores. Estas taxas de convergência são também muito superiores às obtidas utilizando elementos finitos híbridos.

Comparando com a figura 4.23, observa-se que a eficácia dos elementos híbridos-Trefftz comparada com os elementos híbridos é tanto maior quanto maior a oscilação da solução. Na figura 5.13(a) os valores dos erros obtidos nunca são inferiores aos obtidos com elementos finitos híbridos, considerando os mesmos graus de liberdade. Também na figura 5.13(b) não há uma diferença significativa nos valores dos erros obtidos com ambos os elementos para os refinamentos iniciais. No entanto, à medida que a dificuldade numérica da solução analítica aumenta, o facto de se considerarem no domínio dos elementos funções específicas para cada problema, que contém informação física relevante, permite que se obtenham resultados melhores (figuras 5.13(c) e 5.13(d)) para os mesmos graus de liberdade, com excepção do primeiro refinamento.

## 5.5 Exemplos numéricos

Para avaliar o desempenho dos elementos híbridos-Trefftz, foram efectuados os testes definidos na secção 3.5, já feitos com elementos convencionais e com elementos híbridos, nomeadamente o teste 1 (figura 3.8) e teste 2 (figura 3.11).

No teste 1, o domínio foi discretizado em 16 elementos, a indeterminação estática é de 104, a indeterminação cinemática é de 112 e o número total de graus de liberdade considerados no modelo é de 320. As ordens das funções adoptadas nas bases no domínio e os graus das funções adoptadas nas fronteiras, bem como os resultados obtidos do teste 1 com elementos híbridos-Trefftz, encontram-se na figura 5.14.

As figuras mostram a capacidade dos elementos híbridos-Trefftz recuperarem a continuidade entre os elementos e as condições de fronteira impostas.

Comparando os resultados obtidos com os dos elementos híbridos (figura 4.24), observa-se que não há diferenças significativas nos campos de temperatura e fluxos de calor obtidos. A diferença entre os modelos é a dimensão do sistema, que diminui em 101 graus de liberdade. A comparação com os elementos convencionais é igual à já feita com os elementos híbridos.

Tal como foi visto no teste 1 com elementos híbridos, ao escolherem-se as bases dos elementos finitos híbridos-Trefftz é necessário ter em conta a descontinuidade (fisicamente incorrecta) das temperaturas aplicadas no modelo e nos elementos correspondentes diminuir o número de funções nas fronteiras e aumentar o número de funções no domínio.

Para realizar o teste 2 foram considerados 4 elementos finitos híbridos-Trefftz. A indeterminação estática é de 36, a indeterminação cinemática é de 12 e o número total de graus de liberdade considerados no modelo é de 84.

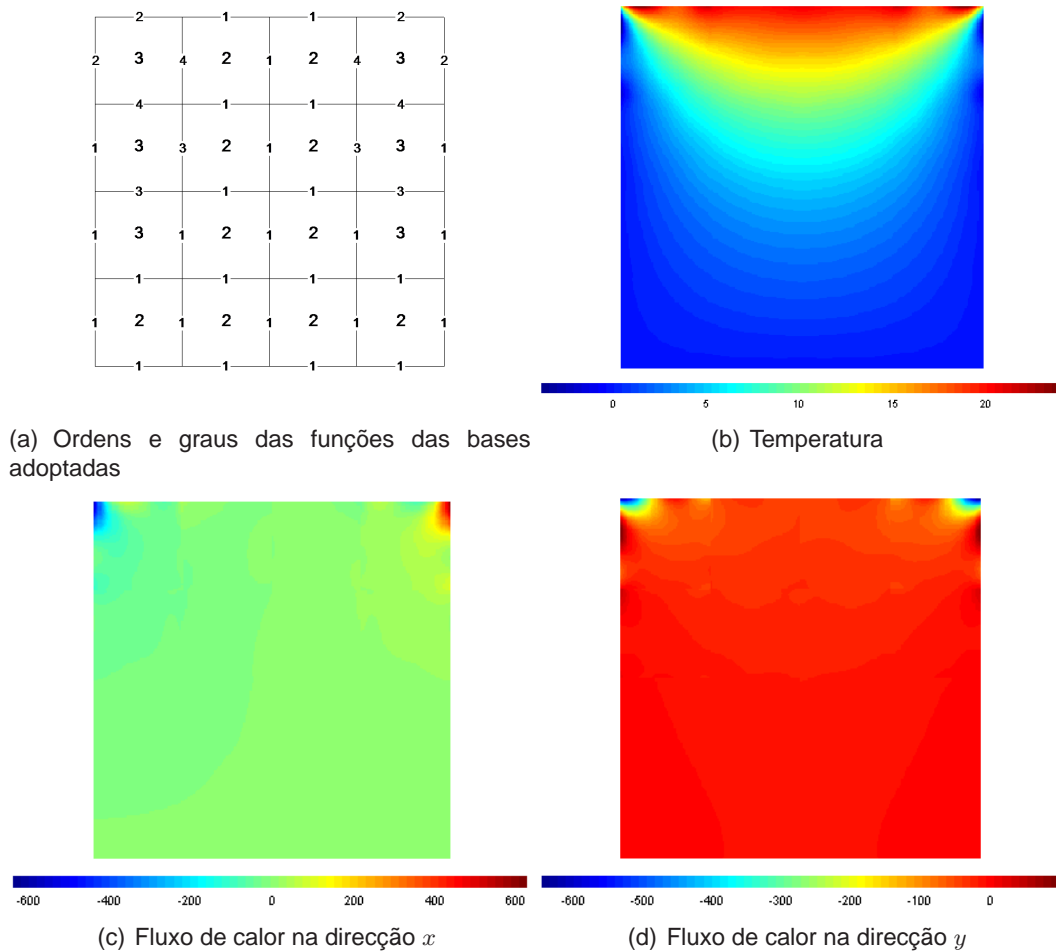


Figura 5.14: Teste 1

A ordem das funções adoptadas nas bases no domínio, o grau das funções adoptadas nas bases nas fronteiras e os resultados do teste 2 estão definidos na figura 5.15.

O modelo recupera bem os campos de temperaturas e fluxos de calor, a continuidade dos campos nas fronteiras interiores e as condições de fronteira impostas devidos ao efeito do calor gerado internamente.

Também com o teste 2 não se obtêm resultados diferentes dos obtidos com elementos híbridos (figura 4.25), excepto na dimensão do sistema usado, que é inferior em 100 graus de liberdade. À semelhança dos elementos híbridos, os elementos híbridos-Trefftz oferecem estimativas dos campos de temperaturas e fluxos de calor com qualidades semelhantes. Relembra-se que, pelo contrário, os elementos finitos convencionais oferecem muito mais qualidade nas soluções cinemáticas (temperaturas, neste caso) do que nas estáticas (fluxos de calor).

Apesar de o tipo de funções adoptadas na base do domínio não ser de escolha livre nos elementos híbridos-Trefftz, as considerações feitas na análise dos elementos híbridos relativamente ao equilíbrio entre as aproximações no domínio e fronteiras mantêm-se válidas para esta análise.

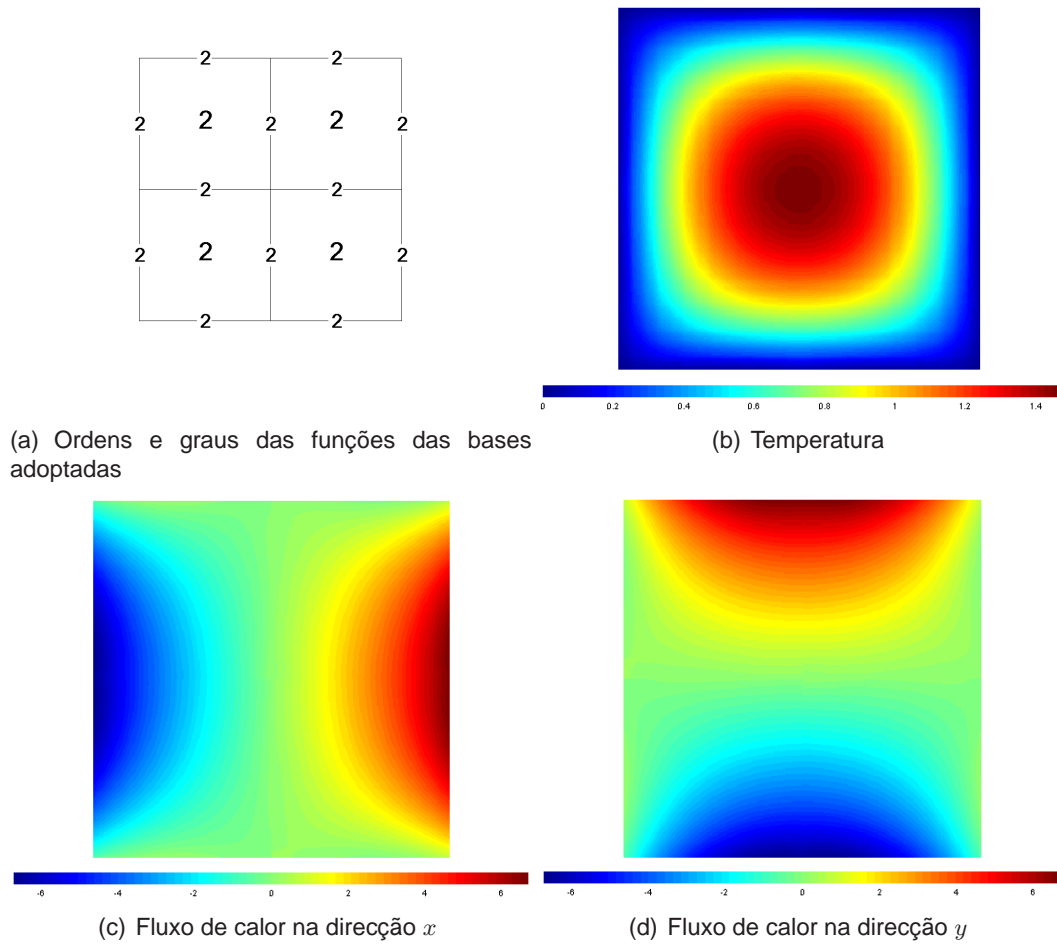


Figura 5.15: Teste 2

Após a análise do método dos elementos finitos híbridos-Trefftz e dos testes numéricos efectuados, na tabela 5.2 é apresentada a comparação entre os elementos finitos estudados aqui e os elementos finitos híbridos.

A comparação entre elementos finitos híbridos-Trefftz e convencionais é semelhante à comparação entre elementos híbridos e convencionais, com excepção de que no caso dos elementos híbridos-Trefftz as funções de aproximação são soluções da forma homogénea da equação diferencial governativa do problema. Assim, as funções não podem ser escolhidas livremente mas passam a conter informação física. Todas as integrações ficam reduzidas à fronteira, o que permite muita flexibilidade da geometria do domínio e elementos. Em tudo o resto mantém-se o que está descrito na tabela 4.2.



Tabela 5.2: Comparação entre elementos finitos híbridos e elementos finitos híbridos-Trefftz

Elementos finitos híbridos	Elementos finitos híbridos-Trefftz
Flexibilidade na escolha das funções de aproximação	No domínio, as funções de aproximação não são de livre escolha. Nas fronteiras de Dirichlet e interiores a escolha é livre
As funções de aproximação no domínio não têm significado físico	As funções de aproximação no domínio contêm informação física
As integrações no domínio não permitem geometrias complexas	Os integrais ficam todos reduzidos à fronteira o que permite que haja muita flexibilidade da geometria
As funções são, normalmente, mais simples, podendo ter integração analítica	As funções são mais complexas numericamente, geralmente não têm integração analítica e podem ter convergência oscilatória
Os sistemas são, normalmente, menos instáveis	Os sistemas podem ficar mais instáveis, com matrizes com números de condição elevados



## Capítulo 6

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

O presente trabalho teve como objectivo desenvolver e testar as formulações de elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz de temperatura para problemas estacionários de condução de calor em materiais isotrópicos. Para a comparação dos métodos com o método de elementos finitos convencionais correspondente, este foi também apresentado.

Foi verificado que os modelos são adequados ao estudo da transferência de calor por condução, sendo capazes de recuperar os campos de temperatura e fluxos de calor devidos a condições de fronteira impostas e devido ao efeito do calor gerado internamente, bem como a continuidade entre elementos adjacentes.

Através dos testes realizados, verificou-se que as soluções da aproximação do campo das temperaturas não apresentam diferenças significativas com as diferentes formulações, o que já não é verificado para o campo dos fluxos de calor que são melhor representados através de elementos não-convencionais. Nos elementos finitos convencionais, a continuidade das temperaturas entre os elementos é imposta localmente, adoptando-se funções de forma simples, tipicamente lineares, enquanto a continuidade dos fluxos é imposta em forma fraca. Assim, a diferença da qualidade dos campos aproximados, característica destes elementos, é devida à maneira como a continuidade é imposta. Já com os elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz, a continuidade das temperaturas no domínio e nas fronteiras dos elementos é imposta em forma fraca e é feita a partir de funções mais complexas numericamente. Consequentemente a qualidade das soluções obtidas é mais equilibrada, obtendo-se melhores aproximações para o campo dos fluxos de calor.

Outra das diferenças verificadas nas análises entre os modelos é o número total de graus de liberdade adoptados nos modelos. Os elementos não-convencionais estudados, através do refinamento  $p$ , permitem que se considere um número bastante inferior de graus de liberdade do que o necessário para a mesma qualidade da solução com elementos convencionais, através do refinamento  $h$ , podendo, com estes elementos, não se conseguir obter uma solução de boa qualidade, para o campo dos fluxos de calor, mesmo com refinamento.

Na análise da convergência dos modelos para refinamento  $p$  e  $h$ , foi verificado

que, para refinamento  $h$ , os elementos finitos convencionais têm uma taxa de convergência superior. No entanto, com elementos híbridos e híbridos-Trefftz, não só a convergência para refinamento  $p$  é superior, como estas taxas de convergência são mais significativas do que às obtidas com elementos convencionais para refinamento  $h$ . Comparando os elementos não-convencionais, observou-se que a natureza das funções adoptadas na base dos elementos híbridos-Trefftz, que contêm informação física do problema e são mais complexas do ponto de vista numérico, traduz-se num desempenho melhor destes elementos na análise de soluções oscilatórias. Por outro lado, os sistemas obtidos com estes elementos têm condicionamento pior.

Os testes realizados com elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz forneceram bons resultados, no entanto, constatou-se que a qualidade dos resultados, que é característica destes elementos, só é possível de obter se houver um equilíbrio adequado entre as bases de aproximação no domínio e fronteiras dos elementos. Apesar de em todos os elementos analisados o refinamento adaptativo e o processamento paralelo ser aplicável, a vantagem dos elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz é que o refinamento  $p$ -adaptativo pode ser feito sem perda dos dados já calculados, uma vez que as bases são contruídas hierárquicamente, e o processamento paralelo pode ser feito independentemente para todos os elementos e fronteiras, ao contrário dos elementos convencionais, que só permitem refinamento  $h$ -adaptativo e onde há somatório de matrizes, o que acrescenta tempo no processamento paralelo. Também se pode concluir que, em geral, os elementos finitos híbridos-Trefftz têm um melhor desempenho relativamente aos híbridos, permitindo considerar um número inferior de graus de liberdade para a mesma qualidade da solução.

Do estudo, prevê-se que seja possível a análise de problemas de condução de calor em sólidos através das novas formulações estudadas aqui, com um tempo de computação inferior ao conseguido através da formulação convencional, que permita a previsão das consequências dos fogos nas estruturas.

Para o desenvolvimento futuro, e num seguimento imediato ao trabalho desenvolvido nesta dissertação, sugere-se o desenvolvimento das formulações em elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz para a análise dinâmica da condução de calor, para problemas periódicos e transitórios.

Existem outras potencialidades para o desenvolvimento do tema, das quais se destacam duas em particular. Uma delas é o desenvolvimento de um programa auto-adaptativo em que a escolha do tipo e grau e/ou ordem das funções de aproximação é feita automaticamente pelo próprio programa, permitindo assim ultrapassar uma das maiores dificuldades na utilização dos elementos finitos não-convencionais. Este estudo está a começar agora a ser desenvolvido no âmbito de outra dissertação. Outra possibilidade para o desenvolvimento do tema é a análise de problemas não-lineares. Um exemplo de um problema não-linear ocorre quando se considera a transferência de calor por radiação, uma vez que este fenómeno é considerado como uma condição de fronteira, dependente da temperatura elevada à quarta potência, na equação da condução térmica. Para estes problemas não é possível a aplicação de elementos híbridos-Trefftz.

A longo prazo seria importante a integração dos problemas térmico e mecânico, de modo a ser possível obter simultaneamente a evolução dos campos de

temperatura e as tensões resultantes na estrutura ao longo do tempo.



# Referências bibliográficas

- [1] NP EN 1991-1-2:2010. *Eurocódigo 1 - Acções em estruturas - Parte 1-2: Acções gerais - Acções em estruturas expostas ao fogo*, 2010.
- [2] Alberta, University of: UofA ANSYS Tutorial. <http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/index.html>, 2001. Consultado em Setembro de 2013.
- [3] Almeida, J. P. M.: *Modelos de elementos finitos para a análise elastoplástica*. Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 1989.
- [4] Almeida, J. P. M. e J. A. T. Freitas: *Alternative approach to the formulation of hybrid equilibrium finite elements*. Computers & Structures, 40:1043–1047, 1991.
- [5] Almeida, J. P. M. e J. A. T. Freitas: *On the parallel implementation of non-conventional finite element formulations*. Em Papadrakakis, M. (editor): *Advanced Finite Element Solution Techniques*. CIMNE, Barcelona, 1995.
- [6] Almeida, J. P. M. e J. B. A. Pereira: *A set of hybrid equilibrium finite element models for the analysis of three-dimensional solids*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39:2789–2802, 1996.
- [7] Argyris, J. H. e A. S. L. Chen: *Application of finite element in space and time*. Ingenieur-Archiv, 41:235–257, 1972.
- [8] Argyris, J. H. e D. W. Scharpf: *Finite elements in time and space*. Aeronautical Journal of the Royal Society, 73:1041–1044, 1973.
- [9] Argyris, J. H., L. E. Vaz e K. J. William: *Higher order methods for transient diffusion analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 12:243–278, 1977.
- [10] Balakrishnan, K. e P. A. Ramachandran: *A particular solution Trefftz method for non-linear Poisson problems in heat and mass transfer*. Journal of Computational Physics, 150:239–267, 1999.
- [11] Bussamra, F. L. S., P. M. Pimenta e J. A. T. Freitas: *Elementos finitos híbridos-Trefftz para análise elastoplástica de sólidos tridimensionais*. Em XX CILAMCE. 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações,

- Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Novembro 1999.
- [12] Castro, L. M. S. e J. A. T. Freitas: *Wavelets in hybrid-mixed stress elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190:3977–3998, 2001.
- [13] Cheung, Y. K., W. G. Jin e O. C. Zienkiewicz: *Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions*. Communications in Applied Numerical Methods, 5:159–169, 1989.
- [14] Cismasiu, C. e J. A. T. Freitas: *Hybrid-Trefftz finite element formulation for spectral elastodynamic analysis*. Em *2nd International PhD Symposium in Civil Engineering*, Budapest, 1998.
- [15] Cismasiu, I.: *Parallel Algorithms for non-conventional finite element computations on distributed architectures*. Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Setembro 2001.
- [16] Cismasiu, I. e J. P. M. Almeida: *Data structures for the distributed iterative solution of non-conventional finite element models*. Advances in Engineering Software, 38:750–762, 2007.
- [17] Cook, R. D., D. S. Malkus, M. E. Plesha e R. J. Witt: *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2002.
- [18] Courant, R.: *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*. Bulletin of the American Mathematical Society, 49:1–61, 1943.
- [19] Edinburgh, University of: *BRE Centre for Fire Safety Engineering*. <http://www.see.ed.ac.uk/fire>. Consultado em Setembro de 2013.
- [20] Freitas, J. A. T.: *Hybrid-Trefftz displacement and stress elements for elastodynamic analysis in the frequency domain*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 4:345–368, 1997.
- [21] Freitas, J. A. T.: *Formulation of elastostatic hybrid-Trefftz stress elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (153):127–151, 1998.
- [22] Freitas, J. A. T.: *Hybrid finite element formulations for elastodynamic analysis in the frequency domain*. International Journal of Solids and Structures, 36(13):1883–2923, Maio 1999.
- [23] Freitas, J. A. T., J. P. M. Almeida e E. M. B. R. Pereira: *Non-conventional formulations for finite element method*. Computational Mechanics, 23(5–6):488–501, Junho 1999.
- [24] Freitas, J. A. T. e F. L. S. Bussamra: *Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47:927–950, 2000.



- [25] Freitas, J. A. T. e C. Cismasiu: *Formulation of hybrid-Trefftz displacement elements*. Em Topping, B. (editor): *Advances in Finite Element Technology*, páginas 195–202. Civil-Comp Press, Edinburgh, 1996.
- [26] Freitas, J. A. T. e C. Cismasiu: *Adaptive p-refinement of hybrid-Trefftz finite element solutions*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39:1095–1121, Agosto 2003.
- [27] Freitas, J. A. T., C. Cismasiu e Z. M. Wang: *Comparative analysis of hybrid-Trefftz stress and displacement elements*. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 6:35–59, 1999.
- [28] Freitas, J. A. T., C. Cismasiu e Z. M. Wang: *Numerical applications with hybrid-Trefftz stress and displacement elements*. *Strojnický Casopis*, 50:73–95, 1999.
- [29] Freitas, J. A. T. e Z. Y. Ji: *Hybrid-Trefftz equilibrium model for crack problems*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:569–584, 1996.
- [30] Freitas, J. A. T. e Z. Y. Ji: *Hybrid-Trefftz finite element formulation for simulation of singular stress fields*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:281–308, 1996.
- [31] Freitas, J. A. T. e I. D. Moldovan: *Hybrid-Trefftz stress element for bounded and unbounded poroelastic media*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(10):1280–1305, 2011.
- [32] Freitas, J. A. T., I. D. Moldovan e C. Cismasiu: *Hybrid-Trefftz displacement element for bounded and unbounded poroelastic media*. *Computational Mechanics*, 48:659–673, 2011.
- [33] Freitas, J. A. T., I. D. Moldovan e M. Toma: *Mixed and hybrid stress elements for biphasic media*. *Computers & Structures*, 88:1286–1299, 2010.
- [34] Freitas, J. A. T. e Z. M. Wang: *Hybrid-Trefftz stress elements for elastoplasticity*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:655–683, 1998.
- [35] Hrenikoff, A.: *Solution of problems of elasticity by the framework method*. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 8:169–175, 1941.
- [36] Huang, H. C. e A. S. Usmani: *Finite element analysis for heat transfer: theory and software*. Springer-Verlag, 1994.
- [37] Huebner, K. H., E. A. Thornton e T. G. Byrom: *The finite element method for engineers*. John Wiley & Sons, 1995.
- [38] Instituto Superior Técnico, Grupo de investigação de análise estrutural do: *Research Group - Hybrid-Trefftz*. <http://www.civil.ist.utl.pt/HybridTrefftz>. Consultado em Setembro de 2013.

- [39] Jesus, A. H., I. Cismasiu e J. A. T. Freitas: *Fully automatic p-adaptive hybrid-Trefftz displacement elements*. Em *19th International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Warsaw, 2011.
- [40] Jirousek, J. e Q. H. Qin: *Application of hybrid-Trefftz element approach to transient heat conduction analysis*. *Computers & Structures*, 58:195–201, 1996.
- [41] Jirousek, J. e M. Stojek: *Numerical assessment of a new T-element approach*. *Computers & Structures*, 57:367–378, 1995.
- [42] Jirousek, J. e A. Wroblewski: *Least-squares T-elements: equivalent FE and BE forms of a substructure-oriented boundary solution approach*. *Communications in Applied Numerical Methods*, 10:21–32, 1994.
- [43] Minkowycz, W. J., E. M. Sparrow e J. Y. Murthy (editores): *Handbook of numerical heat transfer*. John Wiley & Sons, segunda edição, 2006.
- [44] Moldovan, I. D.: *Hybrid-Trefftz displacement and stress elements for biphasic elastostatics*. Internal Report, Catholic University of Portugal, 2010.
- [45] Moldovan, I. D., T. D. Cao e J. A. T. Freitas: *Hybrid-Trefftz finite elements for biphasic elastostatics*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 66:68–82, Abril 2013.
- [46] Munro, J. e D. L. Smith: *Linear programming duality in plastic analysis and synthesis*. Em *Proceedings of the International Symposium on Computer-Aided Structural Design*, número 1. University of Warwick, 1972.
- [47] Pereira, O. J. B. A.: *Utilização de elementos finitos de equilíbrio em refinamento adaptativo*. Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 1996.
- [48] Pereira, O. J. B. A. e J. P. M. Almeida: *Equilibrium finite elements and dual analysis in three-dimensional elastostatics*. Em Oliveira, E. R. A. e J. Bento (editores): *5th EPMESC conference, Macao*, volume 2, 1995.
- [49] Pian, T. H. H. e P. Tong: *Basis of finite element method for solid continua*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1:3–28, 1969.
- [50] Ramsay, A. C. A.: *Robust variable degree equilibrium elements (formulation and application)*. Post-Doctoral Report, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, 1995.
- [51] Rao, S. S.: *The finite element method in engineering*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [52] Rebelo, J. S.: *Modelos de elementos finitos para a análise elástica de lajes*. Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 1993.
- [53] Rein, G., C. Abecassis-Empis e R. Carvel: *The Dalmarnock fire tests: experiments and modelling*. School of Engineering and Electronics, University of Edinburgh, UK, 2007.

- [54] Stojek, M.: *Finite least-square T-elements for the Poisson and Helmholtz equations*. Tese de Doutorado, Swiss Federal Institute of Technology, Março 1996.
- [55] Stojek, M. e J. Jirousek: *Study of direct Trefftz element approach for the Poisson equation in 2D*. Em *XI Polish Conference on Computational Methods in Mechanics*, volume 2, páginas 863–870, Kielce-Cedzyna, Poland, 1993.
- [56] Trefftz, E.: *Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren*. Em *2nd International Congress of Applied Mechanics*, Zurich, 1926.
- [57] Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp: *Stiffness and deflection analysis of complex structures*. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23:805–823, 1956.
- [58] Usmani, A. S., Y. C. Chung e J. L. Torero: *How did the towers collapse - a new theory*. *Fire Safety Journal*, 38:501–533, 2003.
- [59] Veubeke, B. F.: *Displacement and equilibrium models in the finite element method*. Em Zienkiewicz, O. C. e G. S. Holister (editores): *Stress Analysis*, capítulo 9. John Wiley & Sons, 1965.
- [60] Vila Real, P. J. M. M. F.: *Modelação por elementos finitos do comportamento térmico e termo-elástico de sólidos sujeitos a elevados gradientes térmicos*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1988.
- [61] Wang, H. e Q. H. Qin: *Hybrid FEM with fundamental solutions as trial functions for heat conduction simulation*. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 22:487–498, 2009.
- [62] Wang, H., Q. H. Qin e X. P. Liang: *Solving the nonlinear Poisson-type problems with F-Trefftz hybrid finite element model*. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36:39–46, 2012.
- [63] Wilson, E. L. e R. E. Nickel: *Application of the finite element method to heat conduction analysis*. *Nuclear Engineering and Design*, 4:226–286, 1966.
- [64] Zienkiewicz, O. C. e Y. K. Cheung: *Finite elements in the solution of field problems*. *The Engineer*, 220:507–510, 1965.
- [65] Zienkiewicz, O. C. e R. L. Taylor: *The finite element method*, volume 1, The basis. Butterworth-Heinemann, quinta edição, 2000.



## Apêndice A

# Exemplo com elementos finitos convencionais

Será exemplificada aqui a construção do sistema resolutivo do MEF, utilizando elementos finitos convencionais, para um problema relativamente simples. O domínio do problema, as respectivas condições de fronteira e o referencial global escolhido estão representados na figura A.1.

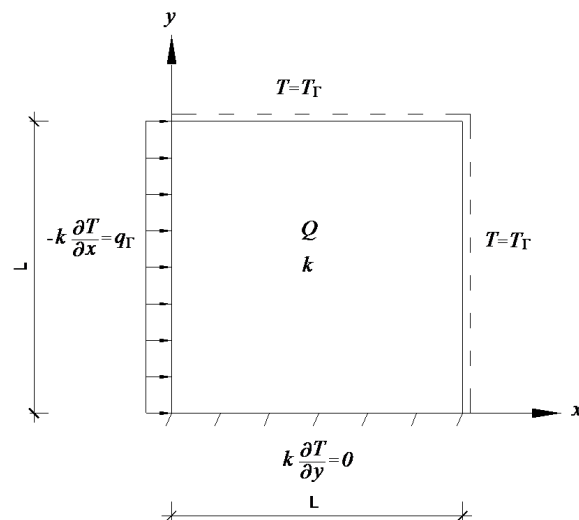


Figura A.1: Exemplo

O objectivo do teste é determinar a distribuição da temperatura e dos fluxos de calor no corpo. O domínio analisado é quadrado, com  $L = 5.0$  [m]. A condutibilidade térmica do material é de  $k = 30.0$  [W/m°C] e o calor gerado internamente, constante, é de  $Q = 100.0$  [W/m³]. Na fronteira de Neumann o fluxo de calor é de  $q_{\Gamma} = 25.0$  [W/m²], nas fronteiras de Dirichlet a temperatura é de  $T_{\Gamma} = 50.0$  [°C] e na fronteira inferior não há variação da temperatura.

Começa-se por dividir a região em quatro elementos quadrados iguais, de lado  $2a = 2b = L/2 = 2.5$  [m], e numerar os nós e elementos como se mostra na figura A.2.

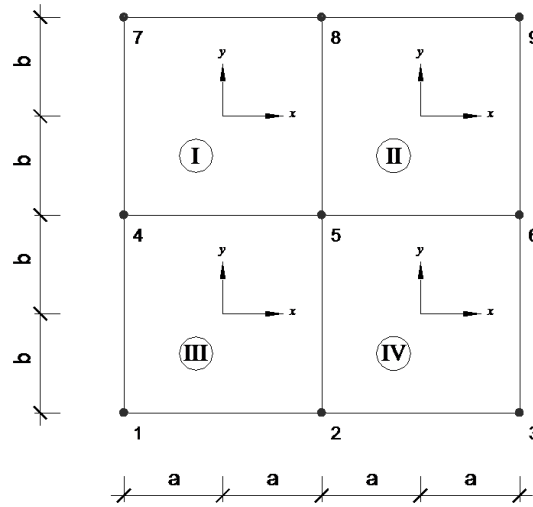


Figura A.2: Malha de elementos finitos

A matriz global de condutibilidade,  $K^G$ , é obtida somando os termos das matrizes de condutibilidade elementares, que correspondem aos nós comuns aos vários elementos. Assim, a matriz de condutibilidade global tem a dimensão igual ao número total de nós do corpo. O termo diagonal  $K_{ii}^G$ , correspondente ao nó  $i$ , é dado pela soma dos termos  $K_{ii}^{(e)}$ , onde  $e$  são os índices de todos os elementos concorrentes no nó  $i$ . O termo  $K_{ij}^G$ , com  $i \neq j$ , é igual à soma dos termos  $K_{ij}^{(e)}$  dos elementos que ligam os nós  $i$  e  $j$ . Se tal elemento não existir,  $K_{ij} = 0$ . Com base no que acabou de ser dito, a matriz de condutibilidade é dada por

$$K^G = \sum_e K^{(e)}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11}^{(III)} & K_{12}^{(III)} & 0 & K_{14}^{(III)} & K_{15}^{(III)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(III)} & K_{22}^{(III)} + K_{22}^{(IV)} & K_{23}^{(IV)} & K_{24}^{(III)} & K_{25}^{(III)} + K_{25}^{(IV)} & K_{26}^{(IV)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{32}^{(IV)} & K_{33}^{(IV)} & 0 & K_{35}^{(IV)} & K_{36}^{(IV)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^{(III)} & K_{42}^{(III)} & 0 & K_{44}^{(III)} + K_{44}^{(I)} & K_{45}^{(III)} + K_{45}^{(I)} & 0 & K_{47}^{(I)} & K_{48}^{(I)} & 0 \\ K_{51}^{(III)} & K_{52}^{(III)} + K_{52}^{(IV)} & K_{53}^{(IV)} & K_{54}^{(III)} + K_{54}^{(I)} & K_{55}^{(III)} + K_{55}^{(IV)} + K_{55}^{(I)} + K_{55}^{(II)} & K_{56}^{(IV)} + K_{56}^{(II)} & K_{57}^{(I)} & K_{58}^{(I)} + K_{58}^{(II)} & K_{59}^{(II)} \\ 0 & K_{62}^{(IV)} & K_{63}^{(IV)} & 0 & K_{65}^{(IV)} + K_{65}^{(II)} & K_{66}^{(IV)} + K_{66}^{(II)} & 0 & K_{68}^{(II)} & K_{69}^{(II)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{74}^{(I)} & K_{75}^{(I)} & 0 & K_{77}^{(I)} & K_{78}^{(I)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{84}^{(I)} & K_{85}^{(I)} + K_{85}^{(II)} & K_{86}^{(II)} & K_{87}^{(I)} & K_{88}^{(I)} + K_{88}^{(II)} & K_{89}^{(II)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{95}^{(I)} & K_{96}^{(I)} & 0 & K_{98}^{(I)} & K_{99}^{(I)} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Para a determinação dos valores dos termos da matriz é necessário determinar as matrizes de condutibilidade dos elementos,  $K^{(e)}$ . Estas vão ser obtidas de seguida, a partir da equação (3.39).



$$\mathbf{K}^{(IV)} = \frac{k}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A matriz de condutibilidade global  $\mathbf{K}^G$  fica

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^G &= \frac{k}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4+4 & -1 & -2 & -1-1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4+4 & -1-1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1-1 & -2 & -1-1 & 4+4+4+4 & -1-1 & -2 & -1-1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1-1 & 4+4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1-1 & -2 & -1 & 4+4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 8 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 16 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & 8 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Os vectores do calor gerado internamente no domínio de cada elemento,  $\mathbf{b}^{(e)}$ , são iguais em todos os elementos. São obtidos da equação (3.40) e dados por

$$\mathbf{b}^{(I)} = Q_{ab} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{QL^2}{16} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$



$$\mathbf{b}^{(II)} = Q_{ab} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{QL^2}{16} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{b}^{(III)} = Q_{ab} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{QL^2}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{b}^{(IV)} = Q_{ab} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{QL^2}{16} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

O vector global,  $\mathbf{b}^G$  é dado por

$$\mathbf{b}^G = \sum_e \mathbf{b}^{(e)} = \frac{QL^2}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \\ 1+1 \\ 1+1+1+1 \\ 1+1 \\ 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{QL^2}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Falta agora calcular os vectores dos fluxos de calor, para cada elemento,  $\mathbf{q}_\Gamma^{(e)}$ . Em geral, desde que os fluxos de calor sejam contínuos no elemento, os integrais dos fluxos de calor anulam-se dentro do domínio, sendo normalmente omitidos do cálculo. Nestes casos, eles apenas são considerados quando existem condições de fronteira que envolvem fluxos de calor.

No elemento 1 e 3 o fluxo de calor,  $q_\Gamma$ , está aplicado na mesma fronteira e tem o

mesmo valor. Logo, do mesmo modo que foi obtida a equação (3.41), os vectores  $q_{\Gamma}^{(e)}$  nas fronteiras com fluxos de calor aplicados são dados por

$$q_{\Gamma}^{(I)} = q_{\Gamma} b \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{q_{\Gamma} L}{4} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A.12)$$

$$q_{\Gamma}^{(III)} = q_{\Gamma} b \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{q_{\Gamma} L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A.13)$$

No elemento 2 não há fronteiras de Neumann e no elemento 4 há uma fronteira de Neumann mas o fluxo de calor aplicado tem o valor de zero. Logo,

$$q_{\Gamma}^{(II)} = q_{\Gamma}^{(IV)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A.14)$$

O vector global,  $q_{\Gamma}^G$  fica assim

$$q_{\Gamma}^G = \sum_e q_{\Gamma}^{(e)} = \frac{q_{\Gamma} L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1+1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{q_{\Gamma} L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A.15)$$

O vector das temperaturas nodais é dado por

$$\phi^T = \{ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4 \ \phi_5 \ \phi_6 \ \phi_7 \ \phi_8 \ \phi_9 \} \quad (\text{A.16})$$

O sistema resolutivo global, a partir da equação (3.44), é

$$\frac{k}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 8 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 16 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & 8 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \end{Bmatrix} = \frac{QL^2}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{q_\Gamma L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Nos nós correspondentes às fronteiras de Dirichlet as temperaturas são conhecidas:

$$\phi_3 = \phi_6 = \phi_7 = \phi_8 = \phi_9 = T_\Gamma$$

Assim, o sistema resolutivo global pode ser escrito apenas para as incógnitas  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_4$  e  $\phi_5$ , na forma

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \frac{3QL^2}{8k} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix} - \frac{3q_\Gamma L}{2k} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} + T_\Gamma \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Resolvendo o sistema anterior obtém-se o vector das temperaturas nodais,

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 73.0 \\ 68.9 \\ 67.7 \\ 65.3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Alternativamente, o sistema global pode ser resolvido de modo a obterem-se as temperaturas nos nós das fronteiras de Neumann e as resultantes dos fluxos de calor normais nos nós das fronteiras de Dirichlet, passando o sistema a ser dado por

$$\frac{k}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 8 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 16 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & 8 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ T_\Gamma \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ T_\Gamma \\ T_\Gamma \\ T_\Gamma \\ T_\Gamma \end{Bmatrix} = \frac{QL^2}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{q_\Gamma L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{q}_{\Gamma 3} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{q}_{\Gamma 6} \\ \bar{q}_{\Gamma 7} \\ \bar{q}_{\Gamma 8} \\ \bar{q}_{\Gamma 9} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Resolvendo o sistema anterior obtém-se o vector

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \bar{q}_{\Gamma 3} \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \bar{q}_{\Gamma 6} \\ \bar{q}_{\Gamma 7} \\ \bar{q}_{\Gamma 8} \\ \bar{q}_{\Gamma 9} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 73.0 \\ 68.9 \\ 403.6 \\ 67.7 \\ 65.3 \\ 654.5 \\ 366.1 \\ 642.0 \\ 308.9 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Na figura A.3(a) encontra-se a representação do campo de temperaturas no corpo.

Os fluxos de calor determinam-se a partir do vector das temperaturas, em cada elemento, pela equação (3.42). O gradiente das funções de forma é calculado da equação (3.37).

As equações dos fluxos de calor, em cada elemento, são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{q}^{(I)}(x, y) &= -k [\nabla U(x, y)] \begin{Bmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_8 \\ \phi_7 \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{4k}{L^2} \begin{bmatrix} y - \frac{L}{4} & \frac{L}{4} - y & \frac{L}{4} + y & -\frac{L}{4} - y \\ x - \frac{L}{4} & -\frac{L}{4} - x & \frac{L}{4} + x & \frac{L}{4} - x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 67.7 \\ 65.3 \\ 50 \\ 50 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}^{(II)}(x, y) &= -k [\nabla U(x, y)] \begin{Bmatrix} \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_9 \\ \phi_8 \end{Bmatrix} \\
&= -\frac{4k}{L^2} \begin{bmatrix} y - \frac{L}{4} & \frac{L}{4} - y & \frac{L}{4} + y & -\frac{L}{4} - y \\ x - \frac{L}{4} & -\frac{L}{4} - x & \frac{L}{4} + x & \frac{L}{4} - x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 65.3 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}^{(III)}(x, y) &= -k [\nabla U(x, y)] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_5 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \\
&= -\frac{4k}{L^2} \begin{bmatrix} y - \frac{L}{4} & \frac{L}{4} - y & \frac{L}{4} + y & -\frac{L}{4} - y \\ x - \frac{L}{4} & -\frac{L}{4} - x & \frac{L}{4} + x & \frac{L}{4} - x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 73.0 \\ 68.9 \\ 65.3 \\ 67.7 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}^{(IV)}(x, y) &= -k [\nabla U(x, y)] \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_6 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} \\
&= -\frac{4k}{L^2} \begin{bmatrix} y - \frac{L}{4} & \frac{L}{4} - y & \frac{L}{4} + y & -\frac{L}{4} - y \\ x - \frac{L}{4} & -\frac{L}{4} - x & \frac{L}{4} + x & \frac{L}{4} - x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 68.9 \\ 50 \\ 50 \\ 65.3 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Os valores dos fluxos de calor em cada nó encontram-se, para a direcção  $x$  e  $y$ , nas tabelas A.1 e A.2, respectivamente.

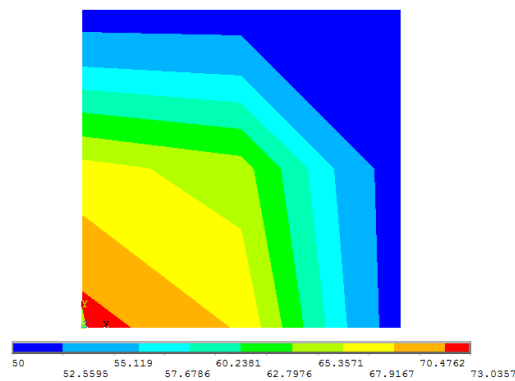
A representação do campo dos fluxos de calor encontra-se na figura A.3(b), para a direcção  $x$ , e na figura A.3(c), para a direcção  $y$ .

Tabela A.1: Valores nodais do fluxo de calor na direcção  $x$  [W/m<sup>2</sup>]

Nó	Elemento			
	I	II	III	IV
1			49.3	
2			49.3	227.1
3				227.1
4	28.9		28.9	
5	28.9	183.2	28.9	183.2
6		183.2		183.2
7	0			
8	0	0		
9		0		

Tabela A.2: Valores nodais do fluxo de calor na direcção  $y$  [W/m<sup>2</sup>]

Nó	Elemento			
	I	II	III	IV
1			64.3	
2			43.9	43.9
3				0
4	212.1		64.3	
5	183.2	183.2	43.9	43.9
6		0		0
7	212.1			
8	183.2	183.2		
9		0		



(a) Temperatura

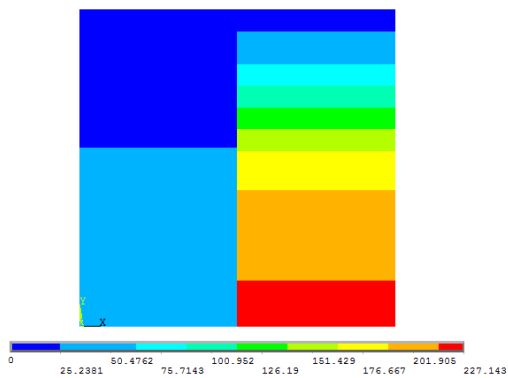
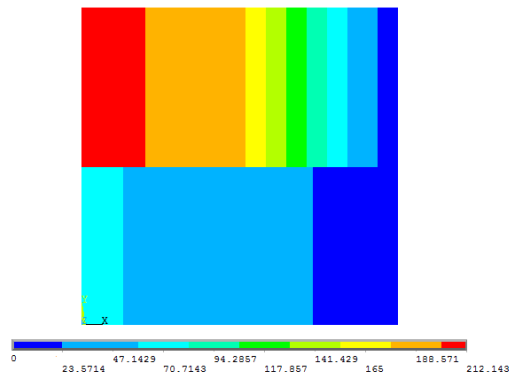
(b) Fluxo de calor na direcção  $x$ (c) Fluxo de calor na direcção  $y$ 

Figura A.3: Resultados

## Apêndice B

# Exemplo com elementos finitos híbridos

O exemplo considerado no apêndice A, representado na figura A.1, vai agora ser resolvido com recurso a elementos híbridos. Todas as considerações relativamente ao domínio mantêm-se, sendo a malha e a numeração dos elementos e fronteiras agora definidas de acordo com a figura B.1.

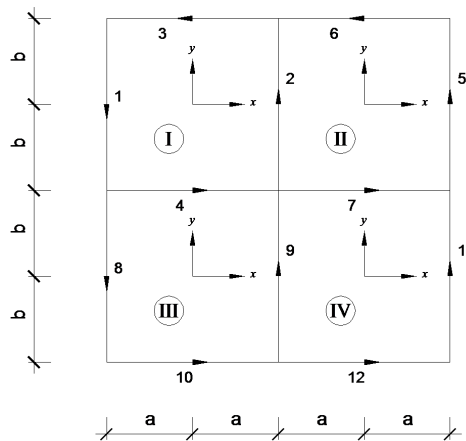


Figura B.1: Malha de elementos finitos

Para a base de aproximação no domínio vão ser consideradas 3 linhas do triângulo de Pascal, ou seja, uma aproximação do segundo grau,

$$U = \{ 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \} \quad (\text{B.1})$$

Para a fronteira considera-se uma base de aproximação do primeiro grau,

$$Z = \{ 1 \quad s \} \quad (\text{B.2})$$

O sistema correspondente, de acordo com a equação (4.16), é da forma

$$\begin{bmatrix}
K^{(I)} & 0 & 0 & 0 & B_2^{(I)} & B_3^{(I)} & B_4^{(I)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K^{(II)} & 0 & 0 & -B_2^{(II)} & 0 & 0 & B_5^{(II)} & B_6^{(II)} & B_7^{(II)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & K^{(III)} & 0 & 0 & 0 & -B_4^{(III)} & 0 & 0 & 0 & B_9^{(III)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & K^{(IV)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_7^{(IV)} & -B_9^{(IV)} & B_{11}^{(IV)} \\
B_2^{(I)} & -B_2^{(II)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_3^{(I)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_4^{(I)} & 0 & -B_4^{(III)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & B_5^{(II)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & B_6^{(II)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & B_7^{(II)} & 0 & -B_7^{(IV)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & B_9^{(III)} & -B_9^{(IV)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & B_{11}^{(IV)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
X^{(I)} \\
X^{(II)} \\
X^{(III)} \\
X^{(IV)} \\
Y_2 \\
Y_3 \\
Y_4 \\
Y_5 \\
Y_6 \\
Y_7 \\
Y_9 \\
Y_{11}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b^{(I)} - q_{\Gamma}^{(I)} \\
b^{(II)} \\
b^{(III)} - q_{\Gamma}^{(III)} \\
b^{(IV)} \\
0 \\
t_{\Gamma 3} \\
0 \\
t_{\Gamma 5} \\
t_{\Gamma 6} \\
0 \\
0 \\
t_{\Gamma 11}
\end{bmatrix}
\quad (B.3)$$

De seguida vão ser determinados os vectores e as matrizes que compõem o sistema.

Para a determinação das matrizes de condutibilidade elementares, começa-se por determinar a matriz das derivadas parciais da base de aproximação  $U$ ,

$$\nabla U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

As matrizes de condutibilidade,  $K$ , de cada elemento, são determinadas a partir da equação (4.5). Dada a igualdade dos elementos, as matrizes são todas iguais e são dadas por

$$\begin{aligned}
K^{(I)} &= K^{(II)} = K^{(III)} = K^{(IV)} = k \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y \end{bmatrix} d\Omega \\
&= k \int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{L}{4}} \int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{L}{4}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y \\ 0 & 2x & 0 & 4x^2 & 2xy & 0 \\ 0 & y & x & 2xy & x^2 + y^2 & 2xy \\ 0 & 0 & 2y & 0 & 2xy & 4y^2 \end{bmatrix} dx dy \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 187.500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 187.500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 390.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 195.313 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 390.625 \end{bmatrix} \quad (B.5)
\end{aligned}$$



Pela mesma razão, os vectores do calor gerado internamente em cada elemento,  $b$ , são todos iguais e são determinados a partir da equação (4.7) como

$$b^{(I)} = b^{(II)} = b^{(III)} = b^{(IV)} = Q \int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{L}{4}} \int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{L}{4}} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \end{Bmatrix} dxdy = \begin{Bmatrix} 625 \\ 0 \\ 0 \\ 7325.521 \\ 0 \\ 325.521 \end{Bmatrix} \quad (B.6)$$

Vão agora ser determinadas as matrizes  $B$  das fronteiras de Dirichlet e interiores, dadas pela equação (4.6). A integração é da forma

$$B = \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \end{Bmatrix} \{ 1 \quad s \} d\Gamma = \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 & s \\ x & xs \\ y & ys \\ x^2 & x^2s \\ xy & xys \\ y^2 & y^2s \end{bmatrix} ds \quad (B.7)$$

Para cada fronteira é necessário alterar as coordenadas cartesianas para as coordenadas ao longo da fronteira, de acordo com a orientação do eixo de cada fronteira.

As coordenadas nas fronteiras  $\Gamma_2^{(I)}$ ,  $\Gamma_5^{(II)}$ ,  $\Gamma_9^{(III)}$  e  $\Gamma_{11}^{(IV)}$  são  $(x, y) = (\frac{L}{4}, \frac{L}{4}s)$ . Substituindo na equação (B.7) obtém-se

$$B_2^{(I)} = B_5^{(II)} = B_9^{(III)} = B_{11}^{(IV)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ 3.125 & 0 \\ 0 & 1.042 \\ 3.906 & 0 \\ 0 & 1.302 \\ 1.302 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.8)$$

As coordenadas nas fronteiras  $\Gamma_3^{(I)}$  e  $\Gamma_6^{(II)}$  são  $(x, y) = (-\frac{L}{4}s, \frac{L}{4})$ . A matriz  $B$  de cada fronteira é dada por

$$B_3^{(I)} = B_6^{(II)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ 0 & -1.042 \\ 3.125 & 0 \\ 1.302 & 0 \\ 0 & -1.302 \\ 3.9063 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.9)$$

As coordenadas nas fronteiras  $\Gamma_4^{(I)}$  e  $\Gamma_7^{(II)}$  são  $(x, y) = (\frac{L}{4}s, -\frac{L}{4})$ . A matriz  $B$  das fronteiras é

$$\mathbf{B}_4^{(I)} = \mathbf{B}_7^{(II)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ 0 & 1.042 \\ -3.125 & 0 \\ 1.302 & 0 \\ 0 & -1.302 \\ 3.9063 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Nas fronteiras  $\Gamma_2^{(II)}$  e  $\Gamma_9^{(IV)}$  as coordenadas são  $(x, y) = (-\frac{L}{4}, \frac{L}{4}s)$ . A matriz  $\mathbf{B}$  correspondente é

$$\mathbf{B}_2^{(II)} = \mathbf{B}_9^{(IV)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ -3.125 & 0 \\ 0 & 1.042 \\ 3.906 & 0 \\ 0 & -1.302 \\ 1.302 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Nas fronteiras  $\Gamma_4^{(III)}$  e  $\Gamma_7^{(IV)}$  as coordenadas são  $(x, y) = (\frac{L}{4}s, \frac{L}{4})$ . A matriz  $\mathbf{B}$  de cada fronteira é dada por

$$\mathbf{B}_4^{(III)} = \mathbf{B}_7^{(IV)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ 0 & 1.042 \\ 3.125 & 0 \\ 1.302 & 0 \\ 0 & 1.302 \\ 3.9063 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Vão agora ser determinados os vectores elementares dos fluxos de calor aplicados nas fronteiras de Neumann,

No elemento  $I$ , o fluxo de calor  $q_\Gamma$  está aplicado na fronteira 1, logo

$$\mathbf{q}_\Gamma^{(I)} = \mathbf{q}_{\Gamma_1}^{(I)} = q_\Gamma \int_{\Gamma_\sigma} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \end{Bmatrix} d\Gamma_\sigma = q_\Gamma \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4}s \\ (\frac{L}{4})^2 \\ (\frac{L}{4})^2 s \\ (\frac{L}{4})^2 s^2 \end{Bmatrix} ds = \begin{Bmatrix} 62.500 \\ -78.125 \\ 0 \\ 97.656 \\ 0 \\ 32.552 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

No elemento  $III$ , o fluxo de calor na fronteira 8 tem valor  $q_\Gamma$ , e na fronteira 10 tem valor nulo, logo

$$\mathbf{q}_{\Gamma}^{(III)} = \mathbf{q}_{\Gamma_8}^{(III)} = q_{\Gamma} \int_{\Gamma_{\sigma}} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \end{Bmatrix} d\Gamma_{\sigma} = q_{\Gamma} \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4}s \\ \left(\frac{L}{4}\right)^2 \\ \left(\frac{L}{4}\right)^2 s \\ \left(\frac{L}{4}\right)^2 s^2 \end{Bmatrix} ds = \begin{Bmatrix} 62.500 \\ -78.125 \\ 0 \\ 97.656 \\ 0 \\ 32.552 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

No elemento  $IV$ , considera-se que o fluxo de calor aplicado na fronteira 12 é nulo, logo

$$\mathbf{q}_{\Gamma}^{(IV)} = \mathbf{q}_{\Gamma_{12}}^{(IV)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

No elemento  $II$  não há fluxos de calor aplicados.

Os vectores das temperaturas impostas nas fronteiras,  $t_{\Gamma}$ , são obtidos da equação (4.12). Neste problema, onde as temperaturas aplicadas têm todas o mesmo valor e as fronteiras têm todas o mesmo comprimento, os vectores da temperatura imposta,  $t_{\Gamma}$ , são iguais em todas as fronteiras e dados por

$$\mathbf{t}_{\Gamma_3} = \mathbf{t}_{\Gamma_6} = \mathbf{t}_{\Gamma_5} = \mathbf{t}_{\Gamma_{11}} = T_{\Gamma} \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ s \end{Bmatrix} ds = \begin{Bmatrix} 125 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

O sistema (B.3) está agora definido. A solução é

$$\mathbf{X}^{(I)} = \begin{Bmatrix} 59.973 \\ -0.482 \\ -6.589 \\ -0.833 \\ 0.386 \\ -0.833 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{X}^{(II)} = \begin{Bmatrix} 55.553 \\ -3.054 \\ -3.054 \\ -0.833 \\ 2.443 \\ -0.833 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{X}^{(III)} = \begin{Bmatrix} 70.464 \\ -1.304 \\ -1.804 \\ -0.833 \\ 0.271 \\ -0.833 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{X}^{(IV)} = \begin{Bmatrix} 60.285 \\ -6.839 \\ -0.732 \\ -0.833 \\ 0.586 \\ -0.833 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{Bmatrix} 100.00 \\ 61.071 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{Y}_3 = \begin{Bmatrix} 250.00 \\ 128.571 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{Y}_4 = \begin{Bmatrix} -125.00 \\ -9.643 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{Y}_5 = \begin{Bmatrix} 225.00 \\ -514.286 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{Y}_6 = \begin{Bmatrix} 250.00 \\ 169.286 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$$\mathbf{Y}_7 = \begin{Bmatrix} -125.00 \\ -256.071 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{Y}_9 = \begin{Bmatrix} 100.00 \\ -50.357 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

$$\mathbf{Y}_{11} = \begin{Bmatrix} 225.00 \\ -293.571 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

Pretende-se agora determinar as temperaturas e os fluxos de calor nos nós definidos na malha de elementos convencionais e representados na figura B.2. Primeiro vão ser determinadas as equações da aproximação da temperatura e fluxos de calor nas direcções  $x$  e  $y$  em cada elemento, como demonstrado nas equações (4.21), (4.23) e (4.24), respectivamente.

$$\bar{T}^{(I)}(x, y) = 59.973 - 0.482x - 6.589y - 0.833x^2 + 0.386xy - 0.833y^2 \quad (\text{B.29})$$

$$\bar{T}^{(II)}(x, y) = 55.553 - 3.054x - 3.054y - 0.833x^2 + 2.443xy - 0.833y^2 \quad (\text{B.30})$$

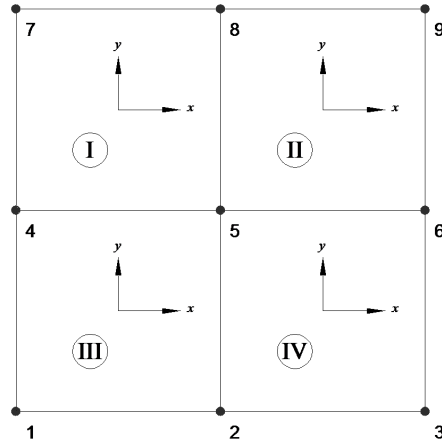


Figura B.2: Nós da malha de elementos finitos

$$\bar{T}^{(III)}(x, y) = 70.464 - 1.304x - 1.804y - 0.833x^2 + 0.271xy - 0.833y^2 \quad (\text{B.31})$$

$$\bar{T}^{(IV)}(x, y) = 60.285 - 6.839x - 0.732y - 0.833x^2 + 0.586xy - 0.833y^2 \quad (\text{B.32})$$

$$\bar{q}_x^{(I)}(x, y) = 14.464 + 50.000x - 11.571y \quad (\text{B.33})$$

$$\bar{q}_y^{(I)}(x, y) = 197.679 - 11.571x + 50.000y \quad (\text{B.34})$$

$$\bar{q}_x^{(II)}(x, y) = 91.607 + 50.000x - 73.286y \quad (\text{B.35})$$

$$\bar{q}_y^{(II)}(x, y) = 91.607 - 73.286x + 50.000y \quad (\text{B.36})$$

$$\bar{q}_x^{(III)}(x, y) = 39.107 + 50.000x - 8.143y \quad (\text{B.37})$$

$$\bar{q}_y^{(III)}(x, y) = 54.107 - 8.143x + 50.000y \quad (\text{B.38})$$

$$\bar{q}_x^{(IV)}(x, y) = 205.179 + 50.000x - 17.571y \quad (\text{B.39})$$

$$\bar{q}_y^{(IV)}(x, y) = 21.964 - 17.571x + 50.000y \quad (\text{B.40})$$

Os valores das temperaturas, fluxo de calor na direcção  $x$  e fluxo de calor na direcção  $y$  obtidos nos nós, determinados a partir das equações (B.29) a (B.40), encontram-se nas tabelas B.1, B.2 e B.3, respectivamente.

As representações dos campos de temperatura e fluxos de calor na direcção  $x$  e  $y$

obtidos encontram-se na figura C.3.

Tabela B.1: Valores nodais da temperatura [ $^{\circ}\text{C}$ ]

Nó	Elemento			
	I	II	III	IV
1			72.2	
2			68.1	68.1
3				49.1
4	66.8		66.8	
5	64.4	64.4	64.4	64.4
6		49.1		49.1
7	49.1			
8	49.1	49.1		
9		49.1		

Tabela B.2: Valores nodais do fluxo de calor na direcção  $x$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]

Nó	Elemento			
	I	II	III	IV
1			-13.2	
2			111.8	164.6
3				289.6
4	-33.6		-33.6	
5	91.4	120.7	91.4	120.7
6		245.7		245.7
7	-62.5			
8	62.5	-62.5		
9		62.5		

Tabela B.3: Valores nodais do fluxo de calor na direcção  $y$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]

Nó	Elemento			
	I	II	III	IV
1			1.8	
2			-18.6	-18.6
3				-62.5
4	149.6		126.8	
5	120.7	120.7	106.4	106.4
6		-62.5		62.5
7	274.6			
8	245.7	245.7		
9		62.5		

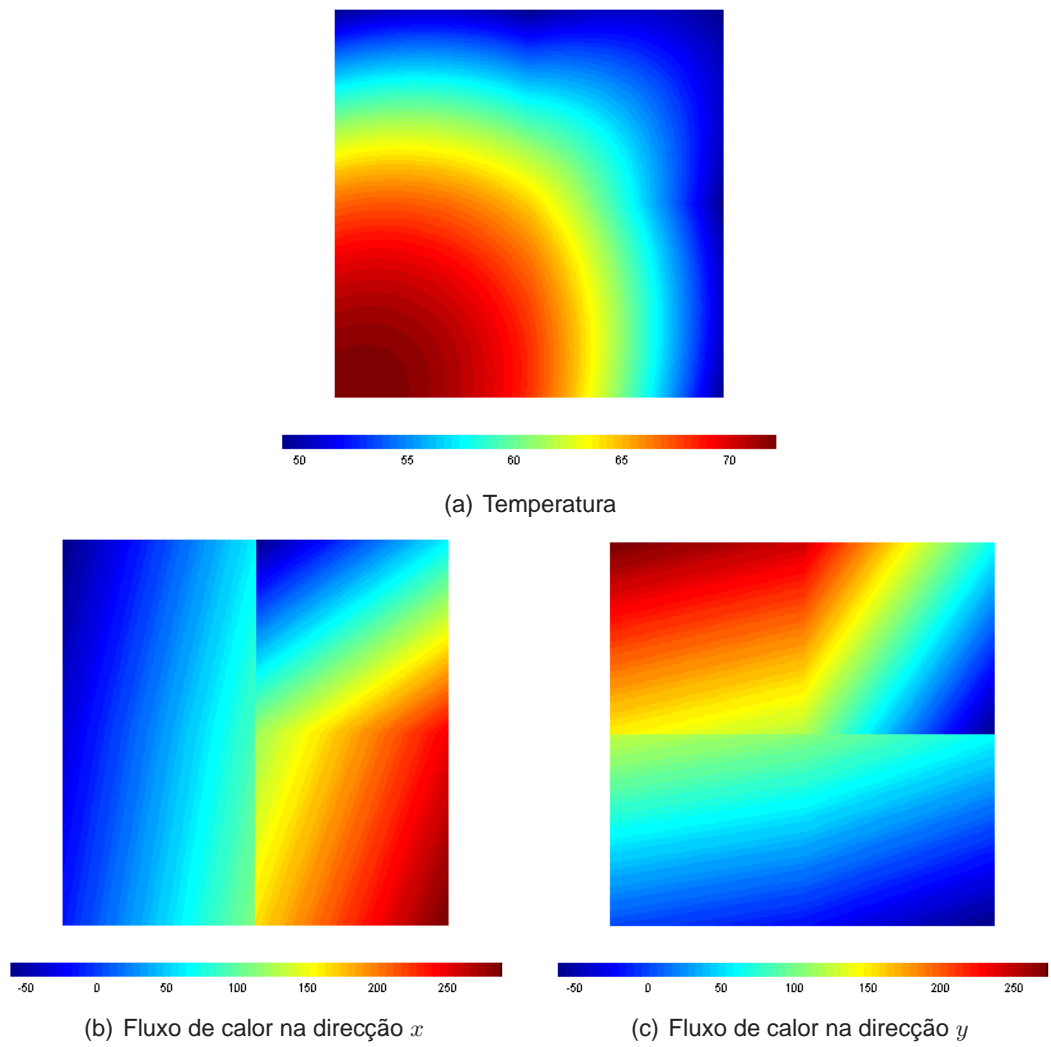


Figura B.3: Resultados





## Apêndice C

# Exemplo com elementos finitos híbridos-Trefftz

O exemplo considerado no apêndice A, representado na figura A.1, vai agora ser resolvido com recurso a elementos híbridos-Trefftz. Todas as considerações relativamente ao domínio mantêm-se, sendo a malha e numeração dos elementos e fronteiras definidas de acordo com a figura C.1.

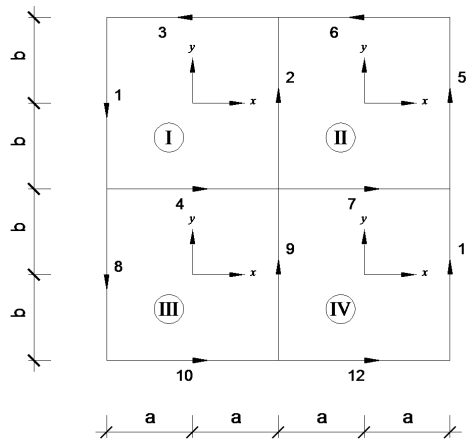


Figura C.1: Malha de elementos finitos

Para a base de aproximação no domínio considera-se uma aproximação de ordem 1, da forma

$$U = \{ 1 \quad x \quad y \quad xy \quad e^x \sin(y) \quad e^x \cos(y) \quad e^y \sin(x) \quad e^y \cos(x) \} \quad (C.1)$$

Da equação (5.5), a solução particular é dada por

$$U_p = -\frac{Q}{4k} (x^2 + y^2) \quad (C.2)$$

Para a fronteira considera-se uma base de aproximação do 1º grau,

$$Z = \{ 1 \quad s \} \quad (C.3)$$

O sistema correspondente, de acordo com a equação (5.26), é da forma

$$\begin{bmatrix} K^{(I)} & 0 & 0 & 0 & B_2^{(I)} & B_3^{(I)} & B_4^{(I)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^{(II)} & 0 & 0 & -B_2^{(II)} & 0 & 0 & B_5^{(II)} & B_6^{(II)} & B_7^{(II)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^{(III)} & 0 & 0 & 0 & -B_4^{(III)} & 0 & 0 & 0 & B_9^{(III)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^{(IV)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_7^{(IV)} & -B_9^{(IV)} & B_{11}^{(IV)} \\ B_2^{(I)} & -B_2^{(II)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_3^{(I)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_4^{(I)} & 0 & -B_4^{(III)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_5^{(II)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_6^{(II)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_7^{(II)} & 0 & -B_7^{(IV)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_9^{(III)} & -B_9^{(IV)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{11}^{(IV)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{(I)} \\ X^{(II)} \\ X^{(III)} \\ X^{(IV)} \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_9 \\ Y_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_p^{(I)} - q_r^{(I)} \\ -K_p^{(II)} \\ -K_p^{(III)} - q_r^{(III)} \\ -K_p^{(IV)} \\ 0 \\ t_{\Gamma 3} - t_{p3} \\ 0 \\ t_{\Gamma 5} - t_{p5} \\ t_{\Gamma 6} - t_{p6} \\ 0 \\ 0 \\ t_{\Gamma 11} - t_{p11} \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

De seguida vão ser determinadas as matrizes e vectores que compõem o sistema.

Começa-se por determinar o gradiente da base no domínio  $U$ ,

$$\nabla U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & e^x \sin(y) & e^x \cos(y) & e^y \cos(x) & -e^y \sin(x) \\ 0 & 0 & 1 & x & e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) & e^y \sin(x) & e^y \cos(x) \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

e o gradiente da solução particular  $U_p$ ,

$$\nabla U_p = -\frac{Q}{2k} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (C.6)$$

As matrizes de condutibilidade,  $K$ , de cada elemento, são determinadas a partir da equação (5.14).

Começa-se por determinar a matriz de condutibilidade do elemento  $I$ , com quatro fronteiras, dada por

$$K^{(I)} = \sum_{\Gamma=1}^4 K_{\Gamma}^{(I)} = K_1^{(I)} + K_2^{(I)} + K_3^{(I)} + K_4^{(I)} \quad (C.7)$$

Em cada fronteira, a matriz é calculada pelo integral

$$K_{\Gamma} = k \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \\ e^x \sin(y) \\ e^x \cos(y) \\ e^y \sin(x) \\ e^y \cos(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x & n_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & e^x \sin(y) & e^x \cos(y) & e^y \cos(x) & -e^y \sin(x) \\ 0 & 0 & 1 & x & e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) & e^y \sin(x) & e^y \cos(x) \end{bmatrix} ds \quad (C.8)$$

É necessário substituir as coordenadas cartesianas pelas coordenadas da fronteira, de acordo com a orientação do eixo em cada fronteira, e especificar

o vector da normal exterior.

Na fronteira 1, o vector da normal é  $\mathbf{n} = \{-1, 0\}$  e as coordenadas na fronteira são  $(x, y) = (-\frac{L}{4}, -\frac{L}{4}s)$ . Do mesmo modo, na fronteira 2,  $\mathbf{n} = \{1, 0\}$  e  $(x, y) = (\frac{L}{4}, \frac{L}{4}s)$ . Na fronteira 3,  $\mathbf{n} = \{0, 1\}$  e  $(x, y) = (-\frac{L}{4}s, \frac{L}{4})$  e na fronteira 4,  $\mathbf{n} = \{0, -1\}$  e  $(x, y) = (\frac{L}{4}s, -\frac{L}{4})$ .

Substituindo os vectores das normais exteriores e as coordenadas das fronteiras na equação (C.8), para cada uma das fronteiras, obtém-se a matriz de condutibilidade do elemento  $I$ , como a soma das matrizes de condutibilidade das fronteiras 1, 2, 3 e 4, dadas por

$$\mathbf{K}_1^{(I)} = \begin{bmatrix} 0 & -75.000 & 0 & 0 & 0 & -16.313 & -30.307 & -91.212 \\ 0 & 93.750 & 0 & 0 & 0 & 20.392 & 37.884 & 114.015 \\ 0 & 0 & 0 & -39.063 & -9.538 & 0 & -14.3524 & -43.195 \\ 0 & 0 & 0 & 48.828 & 11.922 & 0 & 17.941 & 53.993 \\ 0 & 0 & 0 & -9.538 & -2.341 & 0 & -3.488 & -10.497 \\ 0 & -16.313 & 0 & 0 & 0 & -3.815 & -6.226 & -18.738 \\ 0 & 91.212 & 0 & 43.195 & 10.497 & 18.738 & 54.313 & 163.459 \\ 0 & -30.307 & 0 & -14.352 & -3.488 & -6.226 & -18.047 & -54.313 \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{K}_2^{(I)} = \begin{bmatrix} 0 & 75.000 & 0 & 0 & 0 & 198.737 & 30.307 & -91.212 \\ 0 & 93.750 & 0 & 0 & 0 & 248.421 & 37.884 & -114.015 \\ 0 & 0 & 0 & 39.063 & 116.193 & 0 & 14.3524 & -43.195 \\ 0 & 0 & 0 & 48.828 & 145.242 & 0 & 17.941 & -53.993 \\ 0 & 0 & 0 & 116.193 & 347.480 & 0 & 42.492 & -127.884 \\ 0 & 198.737 & 0 & 0 & 0 & 566.207 & 75.848 & -228.270 \\ 0 & 91.212 & 0 & 43.195 & 127.884 & 228.270 & 54.313 & -163.459 \\ 0 & 30.307 & 0 & 14.352 & 42.492 & 75.848 & 18.047 & -54.313 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{K}_3^{(I)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 75.000 & 0 & 30.307 & -91.212 & 0 & 198.737 \\ 0 & 0 & 0 & 39.063 & 14.352 & -43.195 & 116.193 & 0 \\ 0 & 0 & 93.750 & 0 & 37.884 & -114.015 & 0 & 248.421 \\ 0 & 0 & 0 & 48.828 & 17.941 & -53.993 & 145.242 & 0 \\ 0 & 0 & 91.212 & 43.195 & 54.313 & -163.459 & 127.884 & 228.270 \\ 0 & 0 & 30.307 & 14.352 & 18.047 & -54.313 & 42.492 & 75.848 \\ 0 & 0 & 0 & 116.193 & 42.492 & -127.884 & 347.480 & 0 \\ 0 & 0 & 198.737 & 0 & 75.848 & -228.270 & 0 & 566.207 \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$K_4^{(I)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -75.000 & 0 & -30.307 & -91.212 & 0 & -16.313 \\ 0 & 0 & 0 & -39.063 & -14.352 & -43.195 & -9.538 & 0 \\ 0 & 0 & 93.750 & 0 & 37.884 & 114.015 & 0 & 20.392 \\ 0 & 0 & 0 & 48.828 & 17.941 & 53.993 & 11.922 & 0 \\ 0 & 0 & 91.212 & 43.195 & 54.313 & 163.459 & 10.497 & 18.738 \\ 0 & 0 & -30.307 & -14.352 & -18.047 & -54.313 & -3.488 & -6.226 \\ 0 & 0 & 0 & -9.538 & -3.488 & -10.497 & -2.341 & 0 \\ 0 & 0 & -16.313 & 0 & -6.226 & -18.738 & 0 & -3.815 \end{bmatrix} \quad (C.12)$$

A matriz  $K^{(I)}$  é

$$K^{(I)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 187.500 & 0 & 0 & 0 & 182.424 & 182.424 & 0 \\ 0 & 0 & 187.500 & 0 & 182.424 & 0 & 0 & 182.424 \\ 0 & 0 & 0 & 195.313 & 193.045 & 0 & 193.045 & 0 \\ 0 & 0 & 182.424 & 193.045 & 453.765 & 0 & 177.385 & 108.626 \\ 0 & 182.424 & 0 & 0 & 0 & 453.765 & 108.626 & -177.385 \\ 0 & 182.424 & 0 & 193.045 & 177.385 & 108.626 & 453.765 & 0 \\ 0 & 0 & 182.424 & 0 & 108.626 & -177.385 & 0 & 453.765 \end{bmatrix} \quad (C.13)$$

Dada a igualdade dos elementos, as matrizes de condutibilidade são todas iguais:

$$K^{(I)} = K^{(II)} = K^{(III)} = K^{(IV)}$$

Os vectores do calor gerado internamente,  $K_p$ , de cada elemento, são determinados a partir da equação (5.16).

Começa-se por determinar o vector do calor interno do elemento  $I$ . O raciocínio é o mesmo que para o cálculo da matriz de condutibilidade.

Os vectores  $K_p$  em cada uma das fronteiras são dados por,

$$K_{p\Gamma} = \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \\ xy \\ e^x \sin(y) \\ e^x \cos(y) \\ e^y \sin(x) \\ e^y \cos(x) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} n_x & n_y \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{Q}{2}x \\ -\frac{Q}{2}y \end{array} \right\} ds \quad (C.14)$$

As coordenadas nas fronteiras e os vectores das normais em cada uma das fronteiras já foram vistos. Vão ser substituídos na equação (C.14) para o cálculo

do vector  $K_p$  do elemento  $I$ .

$$K_{p1}^{(I)} = \left\{ \begin{array}{c} -156.250 \\ 195.313 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -33.986 \\ 190.025 \\ -63.140 \end{array} \right\} \quad (C.15)$$

$$K_{p2}^{(I)} = \left\{ \begin{array}{c} -156.250 \\ -195.313 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -414.035 \\ -190.025 \\ -63.140 \end{array} \right\} \quad (C.16)$$

$$K_{p3}^{(I)} = \left\{ \begin{array}{c} -156.250 \\ 0 \\ -195.313 \\ 0 \\ -190.025 \\ -63.140 \\ 0 \\ -414.035 \end{array} \right\} \quad (C.17)$$

$$K_{p4}^{(I)} = \left\{ \begin{array}{c} -156.250 \\ 0 \\ 195.313 \\ 0 \\ 190.025 \\ -63.140 \\ 0 \\ -33.986 \end{array} \right\} \quad (C.18)$$

O vector  $K_p^{(I)}$  é

$$K_p^{(I)} = \begin{Bmatrix} -625.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -574.302 \\ 0 \\ -574.302 \end{Bmatrix} \quad (C.19)$$

Dada a igualdade dos elementos, os vectores do calor interno são todos iguais:

$$K_p^{(I)} = K_p^{(II)} = K_p^{(III)} = K_p^{(IV)} \quad (C.20)$$

Vão agora ser determinadas as matrizes  $B$  das fronteiras de Dirichlet e interiores, dadas pela equação (5.15). A integração é da forma

$$B = \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \\ e^x \sin(y) \\ e^x \cos(y) \\ e^y \sin(x) \\ e^y \cos(x) \end{Bmatrix} \{ 1 \ s \} d\Gamma = \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 & s \\ x & xs \\ y & ys \\ xy & xys \\ e^x \sin(y) & e^x \sin(y) s \\ e^x \cos(y) & e^x \cos(y) s \\ e^y \sin(x) & e^y \sin(x) s \\ e^y \cos(x) & e^y \cos(x) s \end{bmatrix} ds \quad (C.21)$$

Neste caso não é necessário definir o vector das normais exteriores mas é necessário alterar as coordenadas cartesianas para as coordenadas ao longo da fronteira, de acordo com a orientação do eixo de cada fronteira.

As coordenadas nas fronteiras  $\Gamma_2^{(I)}$ ,  $\Gamma_5^{(II)}$ ,  $\Gamma_9^{(III)}$  e  $\Gamma_{11}^{(IV)}$  são  $(x, y) = (\frac{L}{4}, \frac{L}{4}s)$ . Substituindo na equação (C.21) obtém-se

$$B_2^{(I)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ 3.125 & 0 \\ 0 & 1.042 \\ 0 & 1.302 \\ 0 & 3.099 \\ 6.625 & 0 \\ 3.040 & 1.152 \\ 1.010 & 0.383 \end{bmatrix} \quad (C.22)$$

As coordenadas nas fronteiras  $\Gamma_3^{(I)}$  e  $\Gamma_6^{(II)}$  são  $(x, y) = (-\frac{L}{4}s, \frac{L}{4})$ . A matriz  $B$  das fronteira é

$$\mathbf{B}_3^{(I)} = \mathbf{B}_6^{(II)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ 0 & -1.042 \\ 3.125 & 0 \\ 0 & -1.302 \\ 3.040 & -1.152 \\ 1.010 & -0.383 \\ 0 & -3.099 \\ 6.625 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.23})$$

As coordenadas nas fronteiras  $\Gamma_4^{(I)}$  e  $\Gamma_7^{(II)}$  são  $(x, y) = (\frac{L}{4}s, -\frac{L}{4})$ . Resulta que

$$\mathbf{B}_4^{(I)} = \mathbf{B}_7^{(II)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ 0 & 1.042 \\ -3.125 & 0 \\ 0 & -1.302 \\ -3.040 & -1.152 \\ 1.010 & 0.383 \\ 0 & 0.254 \\ 0.544 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.24})$$

Nas fronteiras  $\Gamma_2^{(II)}$  e  $\Gamma_9^{(IV)}$  as coordenadas são  $(x, y) = (-\frac{L}{4}, \frac{L}{4}s)$ , pelo que

$$\mathbf{B}_2^{(II)} = \mathbf{B}_9^{(IV)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ -3.125 & 0 \\ 0 & 1.042 \\ 0 & -1.302 \\ 0 & 0.254 \\ 0.544 & 0 \\ -3.040 & -1.152 \\ 1.010 & 0.383 \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

Nas fronteiras  $\Gamma_4^{(III)}$  e  $\Gamma_7^{(IV)}$  as coordenadas são  $(x, y) = (\frac{L}{4}s, \frac{L}{4})$ . A matriz  $\mathbf{B}$  dessas fronteiras é dada por

$$\mathbf{B}_4^{(III)} = \mathbf{B}_7^{(IV)} = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ 0 & 1.042 \\ 3.125 & 0 \\ 0 & 1.302 \\ 3.040 & 1.152 \\ 1.010 & 0.383 \\ 0 & 3.099 \\ 6.625 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

Vão agora ser determinados os vectores dos fluxos de calor aplicados nas fronteiras de Neumann dos elementos,  $q_{\Gamma}$ , a partir da equação (5.17).

Tanto no elemento  $I$  como no elemento  $III$  há um fluxo de calor de valor  $q_\Gamma$  aplicado na mesma fronteira exterior. Os elementos são iguais, logo os vectores dos fluxos de calor aplicados também são. Os vectores são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\Gamma^{(I)} = \mathbf{q}_\Gamma^{(III)} &= q_\Gamma \int_{\Gamma_\sigma} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \\ e^x \sin(y) \\ e^x \cos(y) \\ e^y \sin(x) \\ e^y \cos(x) \end{Bmatrix} d\Gamma_\sigma \\ &= q_\Gamma \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4}s \\ \left(\frac{L}{4}\right)^2 s \\ -e^{-\frac{L}{4}} \sin\left(\frac{L}{4}s\right) \\ e^{-\frac{L}{4}} \cos\left(\frac{L}{4}s\right) \\ -e^{-\frac{L}{4}} s \sin\left(\frac{L}{4}\right) \\ e^{-\frac{L}{4}} s \cos\left(\frac{L}{4}\right) \end{Bmatrix} ds = \begin{Bmatrix} 62.500 \\ -78.125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13.594 \\ -76.010 \\ 25.256 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

No elemento  $II$  e  $IV$  não há fluxos de calor aplicados. Os vectores

$$\mathbf{q}_\Gamma^{(II)} = \mathbf{q}_\Gamma^{(IV)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.28})$$

O vector das temperaturas aplicadas nas fronteiras,  $t_\Gamma$ , é obtido da equação (5.21). Neste problema, onde as temperaturas aplicadas têm todas o mesmo valor e as fronteiras têm todas o mesmo comprimento, o vector das temperaturas,  $t_\Gamma$ , é igual em todas as fronteiras e é dado por

$$t_{\Gamma 3} = t_{\Gamma 6} = t_{\Gamma 5} = t_{\Gamma 11} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u = T_\Gamma \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ s \end{Bmatrix} ds = \begin{Bmatrix} 125 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.29})$$



O vector do calor gerado internamente nas fronteiras de Dirichlet,  $t_p$ , é obtido da equação (5.22).

$$\begin{aligned} t_{p3} = t_{p6} &= \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T U_p d\Gamma_u = \int_{\Gamma_u} \begin{Bmatrix} 1 \\ s \end{Bmatrix} \left[ -\frac{Q}{4k} (x^2 + y^2) \right] d\Gamma_u \\ &= -\frac{QL}{16k} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ s \end{Bmatrix} \left[ \left( -\frac{L}{4}s \right)^2 + \left( \frac{L}{4} \right)^2 \right] ds = \begin{Bmatrix} -4.340 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

$$\begin{aligned} t_{p5} = t_{p11} &= \int_{\Gamma_u} \mathbf{Z}^T U_p d\Gamma_u = \int_{\Gamma_u} \begin{Bmatrix} 1 \\ s \end{Bmatrix} \left[ -\frac{Q}{4k} (x^2 + y^2) \right] d\Gamma_u \\ &= -\frac{QL}{16k} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 \\ s \end{Bmatrix} \left[ \left( \frac{L}{4} \right)^2 + \left( \frac{L}{4}s \right)^2 \right] ds = \begin{Bmatrix} -4.340 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

As matrizes e vectores do sistema (C.4) estão agora definidos. A solução é

$$\mathbf{X}^{(I)} = \begin{Bmatrix} 60.222 \\ -0.944 \\ -6.327 \\ -0.099 \\ 0.134 \\ 0.334 \\ 0.185 \\ -0.331 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.32})$$

$$\mathbf{X}^{(II)} = \begin{Bmatrix} 55.879 \\ -4.007 \\ -4.102 \\ 0.813 \\ 0.767 \\ -0.007 \\ 0.722 \\ 0.021 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.33})$$

$$\mathbf{X}^{(III)} = \begin{Bmatrix} 70.257 \\ -1.365 \\ -2.062 \\ -0.066 \\ 0.161 \\ -0.066 \\ 0.082 \\ 0.068 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

$$\mathbf{X}^{(IV)} = \begin{Bmatrix} 60.593 \\ -6.348 \\ -1.725 \\ 0.009 \\ 0.484 \\ -0.461 \\ 0.092 \\ 0.466 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.35})$$

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{Bmatrix} 48.488 \\ -43.049 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.36})$$

$$\mathbf{Y}_3 = \begin{Bmatrix} 290.953 \\ 5.196 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.37})$$

$$\mathbf{Y}_4 = \begin{Bmatrix} -114.441 \\ 13.873 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.38})$$

$$\mathbf{Y}_5 = \begin{Bmatrix} 176.053 \\ -126.020 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.39})$$

$$\mathbf{Y}_6 = \begin{Bmatrix} 175.113 \\ 125.432 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.40})$$

$$\mathbf{Y}_7 = \begin{Bmatrix} -52.678 \\ 48.032 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.41})$$

$$\mathbf{Y}_9 = \begin{Bmatrix} 110.559 \\ -12.364 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.42})$$

$$\mathbf{Y}_{11} = \begin{Bmatrix} 307.881 \\ -26.396 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.43})$$

A seguir, pretende-se determinar a temperatura e os fluxos de calor nos nós definidos na malha de elementos convencionais e representados na figura C.2.

Primeiro vão ser determinadas as equações da aproximação da temperatura e fluxos de calor nas direcções  $x$  e  $y$  em cada elemento, a partir das equações (5.33), (5.35) e (5.36), respectivamente.

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(I)}(x, y) = & 60.222 - 0.944x - 6.327y + 0.099xy + 0.134e^x \sin(y) + \\ & 0.334e^x \cos(y) + 0.185e^y \sin(x) - 0.331e^y \cos(x) - 0.833(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(II)}(x, y) = & 55.879 - 4.007x - 4.102y + 0.813xy + 0.767e^x \sin(y) - \\ & 0.007e^x \cos(y) + 0.722e^y \sin(x) + 0.021e^y \cos(x) - 0.833(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

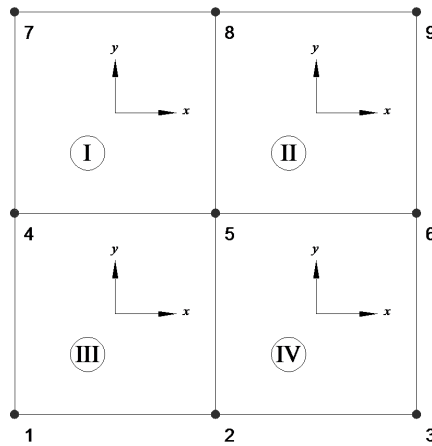


Figura C.2: Nós da malha de elementos finitos

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(III)}(x, y) = & 70.257 - 1.365x - 2.062y - 0.066xy + 0.161e^x \sin(y) - \\ & 0.066e^x \cos(y) + 0.082e^y \sin(x) + 0.068e^y \cos(x) - 0.833(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (C.46)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(IV)}(x, y) = & 60.593 - 6.348x - 1.725y + 0.009xy + 0.484e^x \sin(y) - \\ & 0.461e^x \cos(y) + 0.092e^y \sin(x) + 0.466e^y \cos(x) - 0.833(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (C.47)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_x^{(I)}(x, y) = & 28.309 - 2.966y - 4.033e^x \sin(y) - 10.004e^x \cos(y) - \\ & 5.536e^y \cos(x) + 9.918e^y \sin(x) + 50x \end{aligned} \quad (C.48)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_y^{(I)}(x, y) = & 189.797 - 2.966x - 4.033e^x \cos(y) - 10.004e^x \sin(y) - \\ & 5.536e^y \sin(x) + 9.918e^y \cos(x) + 50y \end{aligned} \quad (C.49)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_x^{(II)}(x, y) = & 120.216 - 24.379y - 22.997e^x \sin(y) + 0.222e^x \cos(y) - \\ & 21.648e^y \cos(x) - 0.623e^y \sin(x) + 50x \end{aligned} \quad (C.50)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_y^{(II)}(x, y) = & 123.048 - 24.379x - 22.997e^x \cos(y) + 0.222e^x \sin(y) - \\ & 21.648e^y \sin(x) - 0.623e^y \cos(x) + 50y \end{aligned} \quad (C.51)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_x^{(III)}(x, y) = & 40.945 + 1.972y - 4.837e^x \sin(y) + 1.976e^x \cos(y) - \\ & 2.467e^y \cos(x) - 2.041e^y \sin(x) + 50x \end{aligned} \quad (C.52)$$

$$\bar{q}_y^{(III)}(x, y) = 61.852 + 1.972x - 4.837e^x \cos(y) + 1.976e^x \sin(y) - 2.467e^y \sin(x) - 2.041e^y \cos(x) + 50y \quad (\text{C.53})$$

$$\bar{q}_x^{(IV)}(x, y) = 190.430 - 0.281y - 14.527e^x \sin(y) + 13.835e^x \cos(y) - 2.751e^y \cos(x) - 13.990e^y \sin(x) + 50x \quad (\text{C.54})$$

$$\bar{q}_y^{(IV)}(x, y) = 51.746 - 0.281x - 14.527e^x \cos(y) + 13.835e^x \sin(y) - 2.751e^y \sin(x) - 13.990e^y \cos(x) + 50y \quad (\text{C.55})$$

Os valores da temperatura, fluxo de calor na direcção  $x$  e fluxo de calor na direcção  $y$  obtidos nos nós, a partir das equações (C.44) a (C.55), encontram-se nas tabelas C.1, C.2 e C.3, respectivamente.

A representação dos campos de temperatura e fluxos de calor na direcção  $x$  e  $y$  obtidos encontram-se, respectivamente, nas figuras C.3(a), C.3(b) e C.3(c).

Tabela C.1: Valores nodais da temperatura [°C]

Nó	Elemento			
	I	II	III	IV
1			71.8	
2			68.0	67.9
3				50.2
4	66.8		66.7	
5	64.1	64.3	64.1	64.1
6		49.8		49.8
7	49.8			
8	49.7	49.7		
9		49.4		

Tabela C.2: Valores nodais do fluxo de calor na direcção  $x$  [W/m<sup>2</sup>]

Nó	Elemento			
	I	II	III	IV
1			-23.3	
2			119.5	129.4
3				320.2
4	-28.1		-29.7	
5	93.7	92.3	96.1	75.5
6		287.8		263.0
7	-13.1			
8	23.8	-4.9		
9		54.6		

Tabela C.3: Valores nodais do fluxo de calor na direcção  $y$  [W/m<sup>2</sup>]

Nó	Elemento			
	I	II	III	IV
1			-2.5	
2			2.2	-8.5
3				16.7
4	130.3		126.8	
5	85.4	94.8	104.5	103.2
6		-0.4		27.6
7	287.6			
8	269.9	284.9		
9		56.6		

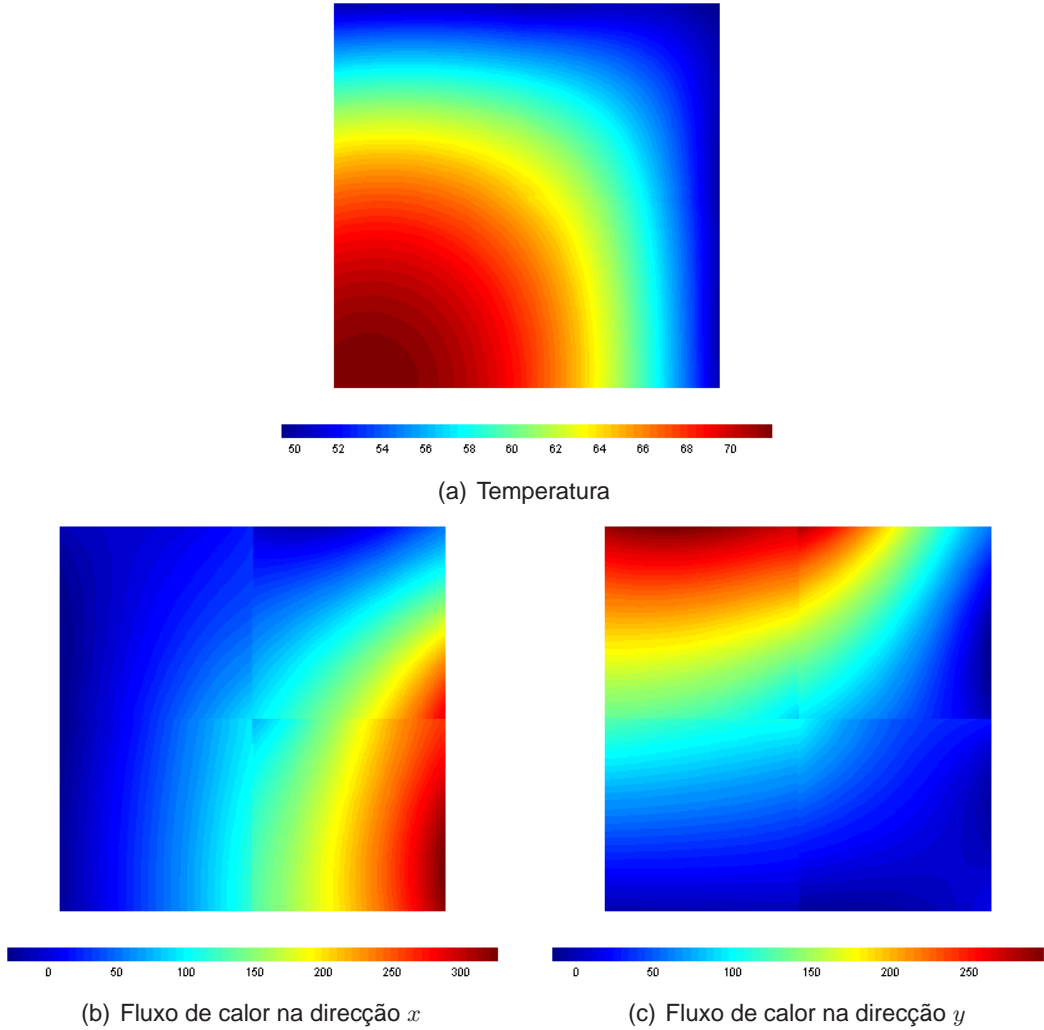


Figura C.3: Resultados